Zkoušková písemka LAP 6.2.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ zadané pomocí matice v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, $$

kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$. Najděte $A^{-1}(M)$, je-li

$$ M = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha . $$

Výsledek zapište opět pomocí afinního obalu, je-li to možné.

2. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$ W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_1(\vec{x}) = 1 \wedge \varphi_2(\vec{x}) = 1\}, $$

kde $(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $(\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, přičemž $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je také báze $\mathbb{R}^3$.

$$ W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\alpha . $$

Najděte všechny příčky W_1 a W_2, které jsou rovnoběžné s varietou W_3.

$$ W_3 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & & & = & 1 \end{array}. $$

Kolik je takových příček?

3. Nechť jsou dány

$$ P = \{x \in \mathcal{P}_3 \mid x(1) - x(2) = 0\}, $$

$$ Q = \{x \in \mathcal{P}_3 \mid \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \text{kde } x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \text{ pro každé } t \in \mathbb{C}\}. $$

Nechť $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$ je operátor derivování, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ je operátor integrování. Zjistěte, zda existuje projektor A_P na P podle Q. Pokud ano, najděte všechna řešení rovnice $(SA_P D)x = b$, kde $b(t) = 2t + 9t^2 - 2t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.