Zkoušková písemka LAP 3.1.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. V prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ najděte všechny příčky lineárních variet W_1 a W_2 jdoucí bodem $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, které jsou rovnoběžné s $W = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_\lambda$. Nechť $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$, pak
$$W_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & u \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; x + u = 0 \wedge y + z - u = -1 \right\},$$
$$W_2 = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_\alpha.$$

2. Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^4)^\#$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$ a platí:
$$(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Nechť dále pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ platí, že $\varphi_2(\vec{x}) = \alpha_1 + x_2 - x_3$, je-li $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$.
   (a) Najděte $\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$ a zapište výsledek jako afinní obal.
   (b) Najděte všechna řešení rovnice $(5\varphi_1 - 3\varphi_2)(\vec{x}) = 2$ a zapište výsledek pomocí neparametrických rovnic v bázi $\mathcal{X}$.

3. Nechť D je operátor derivování, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4)$. Nechť $W = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) - x(2) = 0\}$. Najděte:
   (a) $\ker D^2$, kde $D^2 = DD$ (tedy operátor derivování se složí sám se sebou),
   (b) $(D^2)^{-1}(W)$ (hledá se vzor W při zobrazení D^2),
   (c) $(D^2)(\mathcal{P}_4)$,
   (d) Která z následujících složených zobrazení jsou identickými operátory na $\mathcal{P}_4$?
   (1) S^2D^2, (2) SD^2S, (3) $SDSD$, (4) $DSDS$. Ověřte, nebo vyvraťte protipříkladem.