Matice a lineární zobrazení

Z teorie je třeba vědět:

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a nechť $\vec{b} \in A(P)$, pak $A^{-1}(\vec{b})$ (množina řešení $A\vec{x} = \vec{b}$) splňuje $A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení, tedy $\vec{a}$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$.
2. Matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ splňuje $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.
3. Jak se získá matice složeného zobrazení pomocí matic skládaných zobrazení.

1. Nechť
   $$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \text{ a } \mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$$
   jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ zadané svou maticí v bázi $\mathcal{X}$
   ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$,
   (a) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,
   (b) je-li $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$,
   (c) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2. Nechť
   $$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \text{ a } \mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$$
   jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$,
   ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte
   (a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),
   (b) všechna řešení rovnice
   $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(c) $A^{-1}(P)$, tedy vzor podprostoru P, je-li

$$P = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

4. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (-2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_3)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V_3. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte jádro a hodnost zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadaného pomocí matice ve standardních bázích

$${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 1 \\ -\beta & \beta^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$.

   Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dále je zadáno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ následující maticí ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Nalezněte všechna řešení rovnice $BA\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Nalezněte

   (a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

   (b) všechna řešení rovnice

   $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. V závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ najděte:

   (a) $\ker A$,

   (b) $A^{-1}((\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}))$, kde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \alpha z \\ -\alpha x + \beta z \end{pmatrix}.$$

9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je definované pomocí matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$
   (a) najděte jádro A,
   (b) určete, zda A je prosté,
   (c) najděte obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$,
   (d) určete hodnost A.

10. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definujeme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
    (a) Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.
    (b) Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho hodnost a jádro.

Výsledky: Matice a lineární zobrazení

1. (a) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$
   (b) $B^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$
   (c) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

2. např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$.

3. (a) $\ker A = \{\vec{0}\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 3$, A je regulární operátor
   (b) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$
   (c) např. $A^{-1}(P) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

4. $A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3\}$

5. (i) $\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1 \Longrightarrow h(A) = 2$, $\ker A = [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) $\beta = 0 \Longrightarrow h(A) = 1$, $\ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\beta = 1 \Longrightarrow h(A) = 2$, $\ker A = [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

6. např. $(BA)^{-1}(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

7. (a) $h(A) = 2,\ d(A) = 1,\ \ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A$ není regulární

(b) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

8. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} \\ -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{2}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} + \ker A$

(ii) $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} + \ker A$

(iii) $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} + \ker A$

(iv) $\alpha = \beta = 0 \Longrightarrow \ker A = \mathbb{R}^3,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \emptyset$

9. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \Longrightarrow \ker A = \{\vec{0}\},\ A$ je prosté, $A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}]_\lambda,\ h(A) = 2$

(ii) $\alpha = 0 \vee \alpha = 1 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A$ není prosté, $h(A) = 1,\ A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$ pro $\alpha = 1,\ A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$ pro $\alpha = 0$

10. (a) existuje zobrazení AB i BA

(b) (i) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ je $h(AB) = 2,\ \ker AB = \{\vec{0}\},\ h(BA) = 2$, $\ker BA = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) pro $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ je $h(AB) = 1,\ \ker AB = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda\ h(BA) = 1,\ \ker BA = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$