Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů $P+Q$, průnik podprostorů $P\cap Q$. A je důležité vědět, že $P+Q$ a $P\cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi. Také využijeme 1. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Zjistěte, zda množina $M\subset\mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi M. (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

   (a) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \alpha_j\in Z \quad \forall j\in\{1,2,3\}\}$,

   (b) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\}$,

   (c) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\wedge\alpha_1-\alpha_3=0\}$,

   (d) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=1\}$.

2. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li $P=[\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 3\end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q=[\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}]_\lambda$.

3. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^4$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \mid \alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4=0\wedge 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3-\alpha_4=0\},$$

$$Q=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \mid -2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3+5\alpha_4=0\wedge 4\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3-5\alpha_4=0\}.$$

4. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{C}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid 2\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3=0\}\text{ a}$$

   (a) $Q=[\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}]_\lambda$.

   (b) $Q=[\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 2\end{pmatrix}]_\lambda$.

(c) Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, $V \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P \cap Q \cap V$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda$, $Q = [\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $V = [\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}]_\lambda$.

Zapamatujte si

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $M \subset V$.

1. $M \subset\subset V$ právě tehdy, když M je vektorovým prostorem nad T (operace definovány stejně jako ve V).

2. Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ vektory z V, pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor V, který vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ obsahuje.

3. Pokud $P \subset\subset V$ a $Q \subset\subset V$, potom nejmenší podprostor V obsahující P i Q (tedy i jejich sjednocení) je $P + Q$. POZOR! $P \cup Q$ obecně podprostor V netvoří.

   Příklad: Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $P = [\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)]_\lambda$ a $Q = [\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)]_\lambda$, pak $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \notin P \cup Q$, a tedy $P \cup Q$ není podprostorem V.

Pro zajímavost

1. **[cvičení]** Uvažujte vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Rozmyslete si, jaké vlastní podprostory tento prostor obsahuje. Stejnou úvahu proveďte i pro vektorový prostor šipek v prostoru.

2. Ukažte, že matice s prvky z T rozměru $m \times n$, které mají na předepsaných místech nuly, tvoří podprostor $T^{m,n}$.

3. Rozmyslete si, že vektorový prostor T nad T má jen dva podprostory: $\{0\}$ a sám sebe T.

4. Nechť V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená

   (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R},\ a_{12} = a_{21} \right\},$$

   (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Zjistěte, zda $V \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$.

Výsledky: Podprostor

1. (a) M není uzavřená vůči násobení číslem z C,
   (b) M je podprostor dimenze 2,
   (c) M je podprostor dimenze 1,
   (d) M není uzavřená vůči operacím.

2. $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $(\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1 \end{pmatrix})$, báze $P\cap Q$ je např. $(\begin{pmatrix} 3\\ 5\\ 1 \end{pmatrix})$.

3. $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -3\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix})$, báze $P\cap Q$ je např. $(\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\\ 1 \end{pmatrix})$.

4. (a) $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $\mathcal{E}_3$, báze $P\cap Q$ je např. $(\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix})$.

   (b) $\dim P+Q=\dim P\cap Q=\dim P=\dim Q=2$, tj. $P+Q=P\cap Q=P=Q$, báze je u všech těchto prostorů např. $(\begin{pmatrix} 3\\ 0\\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix})$.

   (c) Platí $P\cap Q\cap V=P$, proto $\dim P\cap Q\cap V=2$ a báze je např. $(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 3 \end{pmatrix})$.

Pro zajímavost

1. Jsou to pouze přímky jdoucí počátkem a nulový vektor (počátek).
   V prostoru jsou to navíc roviny jdoucí počátkem.
2. Snadno uvážíme, že při sčítání a násobení číslem se nuly zachovávají.
3.
4. Obě vlastnosti se při sčítání a násobení číslem zachovávají.