Báze a dimenze, souřadnice vektoru v bázi

Z teorie je třeba znát pojmy: báze, dimenze, souřadnice vektoru v bázi, standardní báze prostorů T^n, $T^{m,n}$ a $\mathcal{P}_n$.
Je třeba umět: vybrat bázi ze souboru generátorů, doplnit LN soubor na bázi.
Dobré je si také uvědomit, že pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ leží ve vektorovém prostoru V nad T, pak je také $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right]_\lambda$ vektorovým prostorem nad T. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. **[cvičení]** Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte nějakou bázi $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5\right]_\lambda$. Vyjádřete vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5$ jako lineární kombinace nalezené báze.

2. **[cvičení]** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi následujícího lineárního obalu souboru vektorů z $\mathbb{C}^4$:
$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

3. Nechť V je vektorový prostor nad T. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je bází V nad T. Nalezněte všechny hodnoty α, pro které je soubor $(\vec{x} + \alpha\vec{y} - \vec{z}, 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, \alpha\vec{x} + \vec{y})$ bází V.

4. **[cvičení]** Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte bázi $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right]_\lambda$, která obsahuje
   (a) vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$,
   (b) vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{C}^3$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^3$, a nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou dvě báze $\mathbb{C}^3$, kde
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Nalezněte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li
$$(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. **[cvičení]** Nechť V_3 je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3 a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor vektorů z V_3 a $\vec{x} \in V_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je také báze V_3, a najděte $(\vec{x})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze $\mathbb{C}^3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$, kde
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$.

9. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{P}_3$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí
$$\vec{x}_1(t) = 2 + 2t - t^2,\ \ \vec{x}_2(t) = 2 - t + 2t^2,\ \ \vec{x}_3(t) = -1 + 2t + 2t^2.$$
Dále nechť $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$.

Pro zajímavost

1. Dokažte: Každý jednoprvkový soubor (α), kde $\alpha \neq 0$ je číslo z tělesa T, je bází vektorového prostoru T nad T. Žádné jiné báze neexistují.

2. Najděte několik bází vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

3. Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Rozmyslete si, že bází takového prostoru je každá dvojice šipek, které neleží v jedné přímce. Podobně, každá trojice šipek, které neleží v jedné rovině, je bází vektorového prostoru šipek (začínajících ve stejném bodě) v prostoru.

4. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných
   (a) na intervalu $(0, \pi)$,
   (b) na množině $\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$.

   Najděte bázi $[f, g]_\lambda$, je-li $f(t) = \sin t,\ g(t) = \cos t$.

5. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, kde $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Najděte bázi a dimenzi V.

Výsledky: Báze a dimenze, souřadnice vektoru v bázi

1. Báze např. $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_4})$,
   $\vec{x_1} = 1 \cdot \vec{x_1} + 0 \cdot \vec{x_2} + 0 \cdot \vec{x_4}$
   $\vec{x_2} = 0 \cdot \vec{x_1} + 1 \cdot \vec{x_2} + 0 \cdot \vec{x_4}$
   $\vec{x_3} = -\vec{x_1} + 1 \cdot \vec{x_2} + 0 \cdot \vec{x_4}$
   $\vec{x_4} = 0 \cdot \vec{x_1} + 0 \cdot \vec{x_2} + 1 \cdot \vec{x_4}$
   $\vec{x_5} = \vec{x_1} - \vec{x_2} + 1 \cdot \vec{x_4}$

2. (a) Pro $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -3$ je $\dim = 4$,

   (b) pro $\alpha = 1$ je $\dim = 1$,

   (c) pro $\alpha = -3$ je $\dim = 3$.

3. Báze pro $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 3$.

4. (a) Báze je např. $(\vec{x}, \vec{x_1}, \vec{x_2})$, resp. $(\vec{x}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$.
   (b) Báze je např. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x_1})$, resp. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x_2})$.

5. $\mathcal{X}$ je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, neboť $\vec{x} = 2 \cdot \vec{x_1} - \vec{x_2} + 3 \cdot \vec{x_3}$

6. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7. $\mathcal{Y}$ je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. Je vhodné si uvědomit, že u vektorů v T^n platí $(\vec{x})_{\mathcal{E}} \equiv \vec{x}$.
   $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$. $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

9. Ze zadání plyne $(\vec{x}_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(\vec{x}_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$(\vec{x}_3)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Příklad je tedy numericky totožný s příkladem 8) a proto výsledek je opět
   $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$. $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Pro zajímavost:

1. Každé číslo $\vec{x} \in T^n$ lze psát $\vec{x} = \frac{x}{\alpha} \odot \vec{\alpha}$ (vyznačeno, kdy chápeme x jako číslo a kdy jako vektor z T^1)

2. Např. $(1, i)$, resp. každý soubor dvou nenulových komplexních čísel, kde jedno není reálný násobek druhého.

3.

4. (a) Báze je např. soubor (f, g).

(b) Báze je např. soubor (g).

5. Báze je kterékoliv kladné číslo různé od $1 \Longrightarrow \dim V = 1$.