Lineární (ne)závislost

Z teorie je třeba znát pojmy: lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární (ne)závislost, lineární obal. Je nutné umět rozhodnout, zda má soustava lineárních algebraických rovnic řešení, a pokud má, tak umět aspoň jedno najít. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. **[cvičení]** Rozhodněte, zda soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ z $\mathbb{R}^3$ je LZ nebo LN.

   (a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},$

   (b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$

   (c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. **[cvičení]** Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Zjistěte, zda soubor $(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, 4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}, 4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z})$ je LZ nebo LN.

3. **[cvičení]** Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která je soubor vektorů z $\mathbb{C}^3$ $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$ LZ.

4. **[cvičení]** Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{C}^3$. Zjistěte, který z vektorů $\vec{x}$ a $\vec{z}$ leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \ \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. **[cvičení]** Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Zjistěte, který z vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

$$\vec{x}_1 = -5\vec{y} + 4\vec{z}, \ \vec{x}_2 = \vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z}, \ \vec{x}_3 = 2\vec{x} - \vec{y} + 8\vec{z}, \ \vec{u} = \vec{x} + 7\vec{y} - 2\vec{z}, \ \vec{v} = 2\vec{x} - \vec{z}.$$

6. **[cvičení]** Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{R}^3$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Nalezněte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

   (a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$

   (b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},$

   (c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix},$

   (d) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix}.$

7. **[cvičení]** Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z}, -\vec{x} + \alpha\vec{z}, \vec{x} + 2\alpha\vec{y} + 8\vec{z})$. Nalezněte všechna $\alpha \in T$ taková, že $\mathcal{Y}$ je LZ a vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ leží v lineárním obalu $\mathcal{Y}$.

8. Připomeňme nejprve, že $\mathcal{P}_3$ je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 2 s přidáním nulového polynomu. Nechť $\vec{x} \in \mathcal{P}_3$ a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathcal{P}_3$ tak, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\vec{x}_1(t) = 1 + t - 2t^2,\ \vec{x}_2(t) = 7 - 8t + 7t^2,\ \vec{x}_3(t) = 3 - 2t + t^2,\ \vec{x}(t) = 2 + 4t - t^2.$$

Zjistěte, zda $\vec{x} \in \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right]_\lambda$.

9. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathcal{P}_5$ takový, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\vec{x}_1(t) = 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4,\ \vec{x}_2(t) = 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4,\ \vec{x}_3(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4.$$

Zjistěte, pro jaké parametry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ je soubor LZ.

Pro zajímavost

1. Je následující soubor vektorů LZ

$$\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix} \right)$$

   (a) v $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{C}$?

   (b) v $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$?

2. Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Co je lineárním obalem dvou vektorů, které leží v jedné přímce? Co je lineárním obalem dvou vektorů, které neleží v jedné přímce? Zamyslete se i nad lineárním obalem dvou a tří vektorů v prostoru.

3. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t) \qquad \text{pro každé } t \in (a,b).$$

Uvažujme nekonečnou spočetnou množinu $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}$, kde $e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2, e_4(t) = t^3$ pro každé $t \in (a, b)$. Čemu je rovna množina tvořená lineárními kombinacemi všech souborů tvořených konečně mnoha prvky z M.

4. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných

   (a) na intervalu $(0, \pi)$,

   (b) na množině $\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Ověřte, že (f, g) je LN soubor v případě (a) a LZ v případě (b), je-li $f(t) = \sin t,\ g(t) = \cos t$.

5. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, kde $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Rozhodněte, zda je soubor (x, y) LZ, pokud

   (a) $x = 1,\ y = 3$,

   (b) $x = 2, y = 3$,

   (c) vektory x a y jsou zvoleny libovolně.

Výsledky: Lineární (ne)závislost

1. (a) LZ, např. $-\vec{x}_1 - 5\vec{x}_2 + 3\vec{x}_3 = \vec{o}$.
   (b) LN.
   (c) LZ, např. $-\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 3\vec{x}_3 = \vec{o}$.

2. LZ, např. $8(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}) - 3(4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}) + (4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z}) = \vec{o}$

3. LZ $\iff \alpha = 0 \vee \alpha = \sqrt{2} \vee \alpha = -\sqrt{2}$

4. $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, např. $\vec{x} = 3\vec{x}_1 - \vec{x}_2$
   $\vec{z} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$

5. $\vec{u} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, např. $\vec{u} = 3\vec{x}_2 - \vec{x}_3$
   $\vec{v} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$

6. (a) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda \iff \alpha = 1$
   (b) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda \iff \alpha \neq -2$
   (c) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ vždy.
   (d) $\vec{x} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ nikdy.

7. LZ $\iff \alpha = 2 \vee \alpha = -4$, ale jen pro $\alpha = 2$ leží vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ v lineárním obalu $\mathcal{Y}$.

8. $\vec{x} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$.

9. LZ pro $\alpha = 8, \beta = 20, \gamma = -13$.

Pro zajímavost:

1. (a) LZ např. $-2\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} + (1+i)\begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) LN, neboť neexistuje reálné řešení příslušné homogenní soustavy.

2. Pokud vektory stejného směru umístíme do jediného bodu, vyplní lineární kombinace přímku procházející tímto bodem, pokud mají směry různé, vyplní celou rovinu.

   V prostoru vyplní přímku resp. rovinu procházející tímto bodem, resp. vyplní celý prostor.

3. Množina je totožná s $\mathcal{P}$.

4. $\alpha \odot x \oplus \beta \odot y = o \iff x^\alpha y^\beta = 1$
   a) LZ zdůvodnění např. "soubor obsahuje nulový vektor"
   b) LZ zdůvodnění např. "$3 = 2^{\log_2 3} \iff 3 = \log_2 3 \odot 2$".

5. vždy LZ zdůvodnění např. "dim $V = 1$, neboť V má jednočlennou bázi např. e (nakreslete si graf e^x). Každý vícečlenný soubor je tedy LZ".