Vektorový prostor

Z teorie je třeba znát: definici tělesa a vektorového prostoru nad T (pro $T = \mathbb{C}$ hovoříme o komplexním vektorovém prostoru, pro $T = \mathbb{R}$ o reálném vektorovém prostoru), vlastnosti vektorového prostoru plynoucí bezprostředně z definice. Dále je třeba znát pojmy: vektor, matice, polynom (předpokládá se také základní znalost teorie polynomů!).

1. **[cvičení]** Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, tj. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

   Ukažte, že V s takto definovanými operacemi je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$. Značíme jej $\mathbb{R}^2$.

2. Zobecnění příkladu 1.: pokud n je přirozené číslo, T je těleso, V je množina uspořádaných n-tic čísel z tělesa (budeme je zapisovat do sloupců), tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in T \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\} \right\},$$

   a operace jsou definovány po složkách,

   tj. pro každé $\alpha \in T$ a pro každé $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$ a každé $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in V$ definujeme

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix},$$

   pak V je vektorovým prostorem nad T. Značíme jej T^n. Nejčastěji budeme pracovat s $\mathbb{C}^n$ nebo $\mathbb{R}^n$.

3. Nechť T je těleso. Uvědomte si, že pak $T^1 = T$ tvoří vektorový prostor nad T. Speciálně $\mathbb{C}$ je komplexním vektorovým prostorem, $\mathbb{R}$ je reálným vektorovým prostorem, $\mathbb{Q}$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$.

4. Nechť n je přirozené číslo, T je těleso. Rozmyslete si, že pokud $T' \subset T$ a T' je těleso, pak T^n tvoří vektorový prostor nad T'. Speciálně $\mathbb{C}^n$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^n$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$. Pozor! Naopak to neplatí: $\mathbb{R}^n$ není vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}^n$ není vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$ ani nad $\mathbb{R}$.

5. **[cvičení]** Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme

(a)

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha\vec{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha\vec{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

6. Nechť V je množina kladných reálných čísel, tj. $V=\{x>0 \mid x\in\mathbb{R}\}$, těleso $T=\mathbb{R}$. Pro každé $\alpha\in\mathbb{R}$ a každé $\vec{x},\vec{y}\in V$ (tj. $\vec{x}=x>0, \vec{y}=y>0$) definujeme $\vec{x}\oplus\vec{y}=xy$ a $\alpha\odot\vec{x}=x^{\alpha}$. Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

7. **[cvičení]** Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) $x_1\in\mathbb{R}$,
   (b) $x_1=0$,
   (c) $x_1=0\vee x_2=0$,
   (d) $x_1+x_2=0$,
   (e) $x_1+x_2=1$,
   (f) $x_1=x_2\wedge x_1\neq x_3$,
   (g) všechny složky jsou reálné,
   (h) $x_1=x_2$,
   (i) $x_1\neq x_2$,
   (j) $x_1+2x_3=0$,
   (k) $x_1+2x_3=1$.

   Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^3$ (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$?

8. Nechť T je těleso. Analogicky jako v příkladu 2. se ověří, že množina matic rozměru $m\times n$ s prvky z T s operacemi definovanými po složkách tvoří vektorový prostor nad T.

9. Nechť V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená

   (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

   $$V=\Big\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22}\in\mathbb{R},\ a_{12}=a_{21}\Big\},$$

   (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

   $$V=\Big\{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22}\in\mathbb{R}\Big\}.$$

   Zjistěte, zda V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

10. Nechť $\mathcal{P}$ je množina polynomů s operacemi definovanými bodově, tj. pro každé $\alpha\in\mathbb{C}$ a každý polynom $x\in\mathcal{P}$ a $y\in\mathcal{P}$ definujeme

    $$(x+y)(t)=x(t)+y(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha\cdot x)(t)=\alpha\cdot x(t) \qquad \text{pro každé } t\in\mathbb{C}.$$

    Ověřte, že $\mathcal{P}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

11. Nechť $n\in\mathbb{N}$. Ověřte, že také množina $\mathcal{P}_n$ tvořená polynomy stupně nejvýše $n-1$ a nulovým polynomem (jeho stupeň není definován) nad tělesem $\mathbb{C}$ tvoří vektorový prostor (operace definovány jako v předchozím příkladu).

Zapamatujte si

Nejdůležitější příklady vektorových prostorů: T^n nad tělesem T, $T^{m,n}$ nad tělesem T, vektorový prostor polynomů $\mathcal{P}$ nad tělesem $\mathbb{C}$, vektorový prostor polynomů $\mathcal{P}_n$ stupně nejvýše $n-1$ s přidáním nulového polynomu nad tělesem $\mathbb{C}$.

Pro zajímavost

1. Uvažujme množinu V reálných posloupností s operacemi definovanými po složkách, tj. nechť $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$a + b = (a_n + b_n)_{n\in N} \qquad \text{a} \qquad \alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Pak V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

   (a) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulami na prvních deseti místech tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (b) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvním místem nenulovým, tj. posloupnostmi a s $a_1 \neq 0$, netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (c) Podmnožina tvořená posloupnostmi s konečným počtem nenul tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (d) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nekonečným počtem nul netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (e) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulovou limitou tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (f) Podmnožina tvořená konvergentními posloupnostmi s nenulovou limitou netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

2. Uvažujme množinu V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t) \qquad \text{pro každé } t \in (a, b).$$

   Pak V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

   (a) Podmnožina tvořená omezenými funkcemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (b) Podmnožina tvořená funkcemi s tzv. konečným nosičem, tj.

$$\left\{ f : (a, b) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \text{existuje konečná } X \subset (a, b) \text{ taková, že } f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in (a, b) \setminus X \right\},$$

   tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (c) Podmnožina tvořená polynomy s reálnými koeficienty tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Výsledky: Vektorový prostor

1. Je třeba prověřit: a) uzavřenost vůči operacím b) axiomy
2. Viz přednáška.
3. Stačí si uvědomit, že jediný rozdíl mezi prvky **tělesa** T a **vektorového prostoru** T je ten, že v prvním případě jsou to reálná čísla a v druhém reálná čísla v závorkách.
4. Stačí zkontrolovat uzavřenost. Axiomy platit musí.
5. Není vektorový prostor.

(a) Neplatí např. axiom o násobení jedničkou.

(b) V prostoru neexistuje nulový vektor.

6. V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

7. Stačí prověřovat uzavřenost. Vektorové prostory nad $\mathbb{C}$ jsou (b), (d), (h), (j).

8. Viz přednáška.

9. a,b) Jsou to vektorové prostory. Stačí prověřit uzavřenost, protože axiomy byly prověřeny v $\mathbb{R}^{2,2}$.

10. Viz přednáška.

11. Viz přednáška.