Sumy a produkty, Matematická indukce

Další příklady najdete ve sbírce Pelantová, Vondráčková: Cvičení z matematické analýzy.

Sumy a produkty

Z teorie je třeba znát:

1. Je-li $a_1, a_2, \dots, a_n$ posloupnost čísel (obecně komplexních), pak **suma** je zkrácený zápis součtu
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
a **produkt** je zkrácený zápis součinu
$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

2. Meze v sumě a produktu mohou být libovolná celá čísla. Např.
$$\sum_{k=-2}^{3} k = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3,$$
$$\prod_{k=-2}^{3} k^2 = 4 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9.$$

3. Je-li horní mez menší než dolní, pak jde o prázdnou sumu, resp. prázdný produkt. Definujeme je následovně: Je-li $a, b \in \mathbb{Z},\ b < a$
$$\sum_{k=a}^{b} a_k = 0 \qquad \text{prázdná suma je rovna 0,}$$
$$\prod_{k=a}^{b} a_k = 1 \qquad \text{prázdný produkt je roven 1.}$$

4. Ověřte a zapamatujte si:
posouvání mezí
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1-l}^{n-l} a_{k+l} \quad \text{pro každé } l \in \mathbb{Z},$$
záměnu sum
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{j,k},$$
vytýkání konstanty K
$$\sum_{k=1}^{n} (K \cdot a_k) = K \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$\prod_{k=1}^{n} (K \cdot a_k) = K^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

1. **[cvičení]** Rozepište a vypočtěte následující sumu a produkt

$$\sum_{i=-1}^{5} i^3 \quad \text{a} \quad \prod_{i=0}^{3} \frac{1}{i+1}$$

2. **[cvičení]** Doplňte mez a členy sumy, resp. produktu tak, aby se výsledek nezměnil

$$\sum_{i=-1}^{5} i^3 = \sum_{i=2}^{?} ? \quad \text{a} \quad \prod_{i=0}^{3} \frac{1}{i+1} = \prod_{i=-21}^{?} ?$$

$$\sum_{j=-1}^{5} j^3 = \sum_{i=?}^{100000} ? \quad \text{a} \quad \prod_{i=0}^{3} \frac{1}{i+1} = \prod_{k=?}^{-10} ?$$

3. **[cvičení]** Vypočtěte následující sumu a produkt

$$\sum_{i=-1}^{4} 2 \quad \text{a} \quad \prod_{j=-1}^{4} 2$$

4. Vypočtěte následující sumy

   (a) **[přednáška]**

   $$\sum_{k=1}^{n} k$$

   (b) **[přednáška]**

   $$\sum_{i=1}^{100} (i-10)$$

   (c) **[cvičení]**

   $$\sum_{i=1}^{20} (3i-7)$$

   (d) **[cvičení]**

   $$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=2}^{6} (1+i)(2+j)$$

5. **[přednáška]** Využijte znalosti $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$ k výpočtu

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

6. **[cvičení]** Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou členy aritmetické posloupnosti, tj. existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že $a_{k+1} - a_k = d$ pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Jak vypadá člen a_n zapsaný pomocí členu a_1? Jak se dá psát $\sum_{k=1}^{n} a_k$ pomocí a_1 a a_n?

7. **[přednáška]** Určete součet geometrické posloupnosti, tj. $\sum_{k=0}^{n} q^k$.

8. Vypočtěte následující sumy

   (a) **[přednáška]**

   $$\sum_{k=1}^{10} 2^k$$

(b) **[cvičení]**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}}$$

9. **[přednáška]** Vypočtěte následující sumu, uvažujte zvlášť n sudé a n liché

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$$

10. **[přednáška]** Vypočtěte následující sumu pomocí převedení na rozdíl sum

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

11. Vypočtěte pomocí záměny sum

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j}$$

12. **[cvičení]** Vypočtěte následující produkty

(a)

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2}$$

(c)

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

(d)

$$\prod_{i,j,k=1}^{n} ijk$$

(e)

$$\sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{i-n-1}{i}$$

Matematická indukce

Jde o následující vlastnost přirozených čísel:
Předpokládejme:

1. *n_0 je přirozené číslo.*

2. *Nějaké tvrzení platí pro n_0.*

3. *Platí-li tvrzení pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, pak platí také pro $n+1$.*

Pak dané tvrzení platí pro všechna přirozená čísla větší nebo rovna n_0.

1. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla platí následující tvrzení

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

   (d) [**přednáška**] Vzorec vhodný k zapamatování
   $$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

   (e) [**cvičení**] Vzorec vhodný k zapamatování (binomická věta)
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

   (f) [**cvičení**] Vzorec vhodný k zapamatování (Moivreova věta)
   $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$$

2. [**přednáška**] Dokažte, že pro každé $n > 1$ platí
   $$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

3. Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n > 2n+1$ a pro která $2^n > n^2$? Dokažte.

4. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla platí následující tvrzení
   $$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. Dokažte, že $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ dělitelné číslem 133.

6. Představte si, že naše bankovky jsou v hodnotách mocnin 3, tj. 1 Kč ($1 = 3^0$), 3 Kč, 9 Kč, atd. Přijde-li k nám údržbář, pak ať chce za opravu pračky jakoukoliv (celou) částku, jsme schopni mu ji zaplatit – za předpokladu, že jak on tak my máme od každé bankovky 1 kus. Dokažte.

Výsledky: Sumy a produkty

1. 224 a $\frac{1}{24}$

2.
$$\sum_{i=2}^{8}(i-3)^3 \quad \text{a} \quad \prod_{i=-21}^{-18}\frac{1}{i+22}$$
$$\sum_{i=99994}^{100000}(i-99995)^3 \quad \text{a} \quad \prod_{k=-13}^{-10}\frac{1}{i+14}$$

3. 12 a 64

4. (a) $n\frac{n+1}{2}$
   (b) 4050
   (c) 490
   (d) 600

5. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. $a_n = a_1 + d(n-1)$ a $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

7. $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pro $q \neq 1$ a n pro $q = 1$

8. (a) $2^{11} - 2$
   (b) $\frac{2}{21}(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n)$

9. $\frac{n}{2}$ pro n sudé a $-\frac{n+1}{2}$ pro n liché

10. $\frac{n}{n+1}$

11. $2^{n+1} - 1$

12. (a) $n + 1$
    (b) $2^{1-2^{-n}}$
    (c) 0
    (d) $(n!)^{3n^2}$
    (e) 0 pro $n \geq 1$ a 1 pro $n = 0$