Zkoušková písemka LAZ 28.1.2013 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & & & = & 1 \\ \alpha^2 x & + & \alpha y & & & = & \alpha^2 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava řešení?
   (b) Pro všechna taková α najděte jedno řešení.
   (c) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava právě jedno řešení?

2. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$.

   (a) Který z vektorů $\vec{x}$ splňuje $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$(a1) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (a2) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (a3) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Vyrobte bázi $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$ změnou pořadí vektorů tak, aby $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ splnil $(\vec{y})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) BONUS za 1 bod: Najděte vektor $\vec{z} \neq \vec{0}$ tak, aby $\vec{z} = (\vec{z})_{\mathcal{X}}$.

3. Zjistěte, v kterém případě je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pokud není, vysvětlete proč. Pokud je, najděte $h(A), d(A), \mathrm{ker} A$. Pro každé $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$(a) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ iy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, ix_1 - ix_2 = 0 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \text{ a } Q = \left[\begin{pmatrix} i \\ i \\ -2i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$. Pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definujeme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

   a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{E}_4$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$.

   Vyřešte ty z úloh, které mají smysl.

(a) Najděte $h(AB), d(AB), \ker AB$ a všechna řešení $(AB)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Najděte $h(BA), d(BA), \ker BA$ a všechna řešení $(BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte složené zobrazení.
   (b) Vyslovte větu o linearitě složeného zobrazení.
   (c) Co víte o hodnosti složeného zobrazení.
   (d) Co víte o matici složeného zobrazení v bázích.

2. (a) Definujte soubor generátorů.
   (b) Definujte lineární obal souboru.
   (c) Vyslovte větu o výběru báze ze souboru generátorů.

3. (a) Definujte součet množin (ne nutně podprostorů).
   (b) Kdy nazveme součet množin direktní?
   (c) Vyslovte ekvivalentní podmínku direktnosti součtu pro podprostory.
   (d) Nechť $P, Q \subset \mathbb{R}^2$. Jak vypadá $P + Q$? A je $P + Q$ direktní? Vysvětlete.

   $(d1)\ P = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},\ Q = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad (d2)\ P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda,\ Q = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda.$

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.