Zkoušková písemka LAZ 22.1.2013 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T.
   (a) Zjistěte, který z vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li: $\vec{x}_1 = -5\vec{y} + 4\vec{z}$, $\vec{x}_2 = \vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z}$, $\vec{x}_3 = 2\vec{x} - \vec{y} + 8\vec{z}$, $\vec{u} = \vec{x} + 7\vec{y} - 2\vec{z}$, $\vec{v} = 2\vec{x} - \vec{z}$.
   (b) Zjistěte, zda je soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ LN či LZ? Zdůvodněte.

2. Doplňte soubor $\mathcal{X}$ na bázi $P = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li to možné.

$$(a) \quad \mathcal{X} = (\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}), \qquad (b) \quad \mathcal{X} = (\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}).$$

3. Pro jaké parametry $\alpha \in \mathbb{C}$ je soubor $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix}i\\\alpha\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2\\0\end{pmatrix})$ bází $\mathbb{C}^3$? Pro všechna taková α najděte
   (a) $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$,
   (b) $\vec{z}$, je-li $(\vec{z})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$P = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = 0\}$ a Q je nejmenší podprostor obsahující vektory $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$.

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ zadané pomocí obrazů bazických vektorů

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

   (a) Určete $h(A)$, $d(A)$.
   (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_3}$.
   (c) Najděte bázi ker A.
   (d) Je A prosté? Je A "na $\mathbb{R}^3$"? Vysvětlete.
   (e) Najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. Nechť A je lineární zobrazení.
   (a) Definujte vzor množiny.
   (b) Jak vypadá $A^{-1}(N)$, kde A je zobrazení z př. 5 a $N = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\}$?
   (c) Definujte obraz množiny.
   (d) Jak vypadá $A(M)$, kde A je zobrazení z př. 5 a $M = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$?
   (e) Dokažte, že obraz podprostoru je podprostor.
2. (a) Definujte číselné těleso.
   (b) Která z množin T není a která je číselné těleso? Nejde-li o číselné těleso, vysvětlete proč.
      i. $T = \{1\}$,
      ii. $T = \mathbb{Z}$ (množina celých čísel),
      iii. $T = \mathbb{Q}$ (množina racionálních čísel).
   (c) Definujte vektorový prostor (z axiomů stačí, když uvedete tři: asociativní zákon, axiom o nulovém vektoru a o opačném vektoru).
3. (a) Definujte izomorfismus (vysvětlete všechny tři pojmy, které se v pojmu izomorfismus skrývají).
   (b) Definujte souřadnicový izomorfismus.
   (c) Nechť P, resp. Q jsou vektorové prostory nad trělesem T s bázemi $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$. Která z následujících matic nemůže být maticí izomorfismu $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a proč?

$$(a) \quad {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c) \quad {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.