Zkoušková písemka LAZ 11.2.2013 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 5 bodů)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \end{array}.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více než jedno řešení.

   (c) V případě, kdy soustava má více řešení, alespoň jedno řešení spočtěte.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$. $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 111 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi P a rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in P$.

3. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^4$, nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathbb{C}^4$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^4$.

$$(\vec{x}_1)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x}_2)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x}_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Lze soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ doplnit na bázi $\mathbb{C}^4$? Vysvětlete.

   (b) Pokud ano, doplňte jej na bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{C}^4$.

   (c) Najděte $(\vec{x})_\mathcal{X}$.

   (d) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť

$$^\mathcal{Y}A^\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Najděte

   (a) $h(A)$ a $d(A)$,

(b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$,

(c) $\ker A$,

(d) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte složené zobrazení.
   (b) Jaký je vztah mezi hodností složeného zobrazení a hodnostmi skládaných zobrazení? (Uveďte co nejkompletnější tvrzení.)
   (c) Co platí pro matici v bázích složeného zobrazení?
2. (a) Definujte lineární funkcionál (tedy 2 věci: funkcionál a jeho linearitu).
   (b) Definujte hodnost lineárního funkcionálu (ne obecného lineárního zobrazení).
   (c) Jakých hodnot může hodnost lineárního funkcionálu nabývat a proč?
   (d) Definujte jádro a defekt lineárního funkcionálu (ne obecného lineárního zobrazení).
   (e) Jakých hodnot může nabývat defekt lineárního funkcionálu a proč?
3. (a) Definujte součin matic.
   (b) Rozhodněte, zda je součin matic
      i. asociativní,
      ii. komutativní.

      Pokud ano, zapište, co to znamená. Pokud ne, uveďte protipříklad.
   (c) Vyjmenujte 3 ekvivalentní řádkové úpravy, jejichž pomocí lze každou matici převést do horního stupňovitého tvaru.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.