Zkoušková písemka LAZ 7.2.2013 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 5 bodů)

1. Nechť soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathbb{C}^3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ -i \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

   (a) Rozhodněte, zda je soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ lineárně nezávislý.

   (b) Pro jaké parametry $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

   (c) Pro jaké parametry $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

2. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou soubory v $\mathbb{R}^4$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Doplňte $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ na bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{R}^4$.

   (b) Doplňte $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ na bázi $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^4$.

   (c) Najděte $(\vec{z})_\mathcal{X}$, pokud $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$.

   Nalezněte dimenzi a bázi podprostoru $P + Q$ a zjistěte, zda $P + Q$ je direktní (zdůvodněte), je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\lambda$$

$$(a)\ Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -21 \\ -21 \\ -21 \\ -42 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \quad (b)\ Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

4. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované pro každé $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

   Dále nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

   je báze $\mathbb{R}^3$ a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, splňuje ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte

(a) $h(A+B)$ a $d(A+B)$,

(b) ${}^{\mathcal{E}_3}(A+B)^{\mathcal{E}_2}$,

(c) $\ker(A+B)$,

(d) všechna řešení $(A+B)\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte lineárně závislý a lineárně nezávislý soubor.

   (b) Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení o LN a LZ souborech. Nepravdivá tvrzení vyvraťte protipříkladem.

   i. Vyhodíme-li z LN souboru vektor, zůstane LN.

   ii. Přidáme-li do LN souboru vektor, zůstane LN.

   iii. Obsahuje-li soubor nulový vektor, pak je LZ.

   iv. V LZ souboru vždy existuje vektor, který je lineární kombinací ostatních vektorů.

2. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.

   (b) Vyslovte větu, ve které je $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ vyjádřeno pomocí matice zobrazení A v nějakých bázích.

   (c) Jak hledáme řešení $A\vec{x} = \vec{b}$, známe-li matici zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$?

3. (a) Definujte izomorfní zobrazení (nápověda: jde o zobrazení se třemi vlastnostmi) a každou z vlastností vysvětlete.

   (b) Definujte izomorfní vektorové prostory.

   (c) Který z následujících prostorů je izomorfní s $\mathbb{C}^2$. Vysvětlete.

   $(i)\ \mathbb{R}^2$, $(ii)\ \mathcal{P}_2$ (prostor polynomů stupně maximálně 1 s přidáním nulového polynomu).

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.

2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.