Zkoušková písemka LAZ 7.1.2013 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Zjistěte, jakou podmínku musí splňovat parametr $\lambda \in \mathbb{R}$, aby soubor $\mathcal{X}$ tvořil bázi $\mathbb{R}^3$.
$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \right).$$
Zvolte pak jedno konkrétní číslo λ, pro které je soubor $\mathcal{X}$ bází, a spočtěte:
   (a) $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,
   (b) $\vec{y}$, je-li $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi a najděte bázi následujícího podprostoru $P \subset\subset \mathbb{C}^4$:
$$[\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

3. Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme $\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
   (a) a $\alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$,
   (b) a $\alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$,
   (c) a $\alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix}$.

   V kterém případě je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$? V případech, kdy není, vysvětlete proč.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q = [\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$.

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$ a nechť ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Dále nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^\#$ definovaný pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ jako
$$\varphi(\vec{x}) = x_1 + x_2.$$
Vyřešte ty z úloh, které mají smysl.

(a) Určete $h(A\varphi)$, $d(A\varphi)$, $\ker(A\varphi)$ a ${}^{\mathcal{Y}}(A\varphi)^{\mathcal{Z}}$, kde $\mathcal{Z} = ((2))$ je báze $\mathbb{R}^1$.

(b) Určete $h(\varphi A)$, $d(\varphi A)$, $\ker(\varphi A)$ a ${}^{\mathcal{Y}}(\varphi A)^{\mathcal{Z}}$, kde $\mathcal{Z} = ((2))$ je báze $\mathbb{R}^1$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte bázi.
   (b) Definujte dimenzi (konečnou, nekonečnou, nulovou).
   (c) Uveďte příklad vektorového prostoru s nekonečnou dimenzí a vysvětlete, proč má nekonečnou dimenzi.
2. (a) Definujte lineární funkcionál.
   (b) Definujte hodnost lineárního funkcionálu.
   (c) Jakých hodnot může hodnost lineárního funkcionálu nabývat a proč?
   (d) Definujte jádro a defekt lineárního funkcionálu.
   (e) Jakých hodnot může nabývat defekt lineárního funkcionálu a proč?
3. (a) Definujte doplněk podprostoru.
   (b) Je doplněk určen jednoznačně? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad.
   (c) Jak zkonstruujete doplněk P do V, pokud
      i. $\dim P = 0$?
      ii. $0 < \dim P < \dim V$?
      iii. $\dim P = \dim V$?

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.