Zkoušková písemka LAZ 4.4.2013 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$. $P = \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ určete dimenzi P, najděte bázi P a najděte doplněk P do $\mathbb{R}^4$.

2. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathbb{R}^3$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3,\ \vec{z} = (\vec{y})_{\mathcal{Y}}.$$

   (a) Najděte složky vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

   (b) Určete, zda soubor $\mathcal{X} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Zdůvodněte.

   (c) Najděte $(\vec{y})_{\mathcal{X}}$, je-li to možné.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(A)$, $d(A)$.

   (b) Doplňte $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ na bázi $A(\mathbb{R}^3)$.

   (c) Najděte bázi ker A.

   (d) Je A izomorfní zobrazení? Vysvětlete.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Je-li $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, najděte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$. Není-li $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, zdůvodněte, proč není.

   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 1 \right\}$,

   (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$.

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$.

   (a) Najděte ${}^{\mathcal{E}}A$.

   (b) Najděte všechna řešení $A\vec{x} = \vec{b}$, je-li $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte podprostor.
   (b) Definujte jádro lineárního zobrazení.
   (c) Dokažte, že jádro lineárního zobrazení je podprostor. (Vyjděte přímo z definice podprostoru.)
2. (a) Definujte souřadnici.
   (b) Definujte i-tý souřadnicový funkcionál.
   (c) Nechť $\vec{e}_2^{\#}$ je 2. souřadnicový funkcionál ve standardní bázi $\mathbb{R}^3$. Čemu se rovná $\vec{e}_2^{\#}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix})$?
3. (a) Definujte soubor generátorů a bázi.
   (b) Uveďte příklad báze
      i. $\mathbb{Q}^2$ (prostoru dvojic racionálních čísel),
      ii. $\mathbb{R}^{2,2}$ (prostoru reálných matic rozměru 2×2),
      iii. $\mathcal{P}_3$ (prostoru polynomů stupně nejvýše 2 s přidáním nulového polynomu).
   (c) Vyslovte větu o výběru báze ze souboru generátorů.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.