Kapitola 1

Vektorové prostory

1.1 Vektorový prostor

Z teorie je třeba znát: definici tělesa a vektorového prostoru, vlastnosti vektorového prostoru plynoucí bezprostředně z definice, pojmy vektor, matice, polynom (a základní znalost teorie polynomů).

1.1.1

Nechť V je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

těleso T= $\mathbb{R}$. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\alpha \in T$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ definujeme

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že V s takto definovanými operacemi je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ a značíme ho $\mathbb{R}^2$.

1.1.2

Nechť n je přirozené číslo, T je těleso, V množina všech uspořádaných n-tic čísel z tělesa, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{n} \right\},$$

a operace jsou definovány po složkách,

tj. pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\alpha \in T$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ definujeme

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha\vec{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix},$$

pak V je vektorovým prostorem nad tělesem T a značíme ho T^n. Nejčastěji budeme pracovat s $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

1.1.3

Nechť T je těleso. Uvědomte si, že pak $T^1 = T$ tvoří vektorový prostor nad T. Speciálně $\mathbb{C}$ je komplexním vektorovým prostorem, $\mathbb{R}$ je reálným vektorovým prostorem, $\mathbb{Q}$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$.

1.1.4

Nechť n je přirozené číslo, T je těleso. Rozmyslete si, že je-li $T' \subset T$ a T' je těleso, pak T^n tvoří vektorový prostor nad T', při operacích definovaných po složkách. Speciálně $\mathbb{C}^n$ je vektorovým prostorem na $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^n$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$. Pozor! Opačně to neplatí: $\mathbb{R}^n$ není vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}^n$ není vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ ani nad $\mathbb{R}$. Rozmyslete!

1.1.5

Nechť V je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel, tj. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ definujeme

a) $\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$, $\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$.

Je množina V s těmito operacemi vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbb{R}$?

1.1.6

Nechť V je podmnožina vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$ složená z těch vektorů $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, pro něž platí:

a) $x_1 \in \mathbb{R}$,

b) $x_1 = 0$,

c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,

d) $x_1 + x_2 = 0$,

e) $x_1 + x_2 = 1$,

f) $x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_3$,

g) všechny složky jsou reálné,

h) $x_1 = x_2$,

i) $x_1 \neq x_2$,

j) $x_1 + 2x_3 = 0$,

k) $x_1 + 2x_3 = 1$.

Která z těchto množin je při operacích definovaných po složkách vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$?

1.1.7

Nechť V je podmnožina vektorového prostoru polynomů $\mathcal{P}$ složená z těch vektorů $x \in \mathcal{P}$, pro něž platí:

a) stupeň x je roven nejvýše třem,

b) $2 \cdot x(0) = x(1)$,

c) $x(t) \geq 0$ pro $t \in (0, 1)$,

d) $x(t) = x(1 - t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$,

e) stupeň x je roven nule,

f) stupeň x je větší než tři nebo není definován.

Která z těchto množin V je s operacemi zavedenými jako v prostoru $\mathcal{P}$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$?

1.1.8

Nechť n, m jsou přirozená čísla, T je těleso, V množina všech matic rozměru $n \times m$ s prvky z T, tj.

$$V = \left\{ \mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \middle| \, x_{ij} \in T \text{ pro každé } i \in \hat{n}, j \in \hat{m} \right\},$$

a operace jsou definovány po prvcích,

tj. pro každé $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in V$, $\alpha \in T$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$, $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix}$

definujeme

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} & \cdots & x_{1m} + y_{1m} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} & \cdots & x_{2m} + y_{2m} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} + y_{n1} & x_{n2} + y_{n2} & \cdots & x_{nm} + y_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} & \cdots & \alpha x_{1m} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} & \cdots & \alpha x_{2m} \\ \vdots & & & \\ \alpha x_{n1} & \alpha x_{n2} & \cdots & \alpha x_{nm} \end{pmatrix},$$

pak V je vektorovým prostorem nad tělesem T a značíme ho $T^{n,m}$.

1.1.9

Nechť V je podmnožina vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ složená z těch vektorů $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, pro něž platí:

a) $x_{12} = 1$,

b) $2x_{11} - 3x_{21} + 5x_{22} = 0$,

c) $x_{11} \neq x_{22} \wedge x_{12} \neq x_{21}$,

d) x_{21} je racionální,

e) x_{22} je iracionální,

f) $x_{11} + 2x_{21} = 0 \vee x_{12} + x_{22} = 2$,

g) $x_{21} = x_{12} \wedge x_{11}, x_{22} \in \mathbb{R}$, tj. symetrickými maticemi,

h) $x_{21} = x_{12} = 0 \wedge x_{11}, x_{22} \in \mathbb{R}$, tj. diagonálními maticemi.

Která z těchto množin V je s operacemi zavedenými jako v prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

1.1.10

Nechť $V = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (tj. $\vec{x} = x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \vec{y} = y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\alpha \in \mathbb{C}$ definujme

$$\begin{aligned} \vec{x} \oplus \vec{y} &= x \cdot y, \\ \alpha \odot \vec{x} &= \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

Je množina V s operacemi $\oplus$ a $\odot$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$?

1.1.11

Nechť V je množina všech polynomů. Pro každé $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ definujeme

$$x + y = \begin{cases} \text{nulovému polynomu, jsou-li x, y oba nenulové nebo oba nulové polynomy,} \\ \text{nenulovému z nich v opačném případě,} \end{cases}$$

$(\alpha x)(t) = \alpha \cdot x(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
Je množina V s takto zavedenými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$?

1.1.12

Nechť $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (tj. $\vec{x} = x \in (0, +\infty), \vec{y} = y \in (0, +\infty)$), $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme

$$\begin{aligned} \vec{x} \oplus \vec{y} &= x \cdot y, \\ \alpha \odot \vec{x} &= x^{\alpha}. \end{aligned}$$

Je množina V s operacemi $\oplus$ a $\odot$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

1.1.13

Nechť $V = \{5\}$. Je možno definovat ve V operace sčítání a násobení reálným číslem tak, aby V byl vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

1.1.14

Nechť V je množina všech posloupností komplexních čísel. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ definujeme ($\vec{x} = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\vec{y} = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$)

$$\begin{aligned} \vec{x} \oplus \vec{y} &= \{x_j + y_j\}_{j=1}^{\infty}\,, \\ \alpha \odot \vec{x} &= \{\alpha x_j\}_{j=1}^{\infty}\,. \end{aligned}$$

Je množina V s takto zavedenými operacemi vektorovým prostorem na $\mathbb{C}$? Zjistěte, zda množina všech posloupností reálných čísel je s obdobně zavedenými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

1.1.15

Nechť V je množina všech posloupností reálných čísel. Zjistěte, která z následujících podmnožin množiny V je s operacemi zavedenými v předchozím příkladě vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$:

a) množina všech omezených posloupností,

b) množina všech posloupností neomezených shora,

c) množina všech neomezených posloupností,

d) množina všech konvergentních posloupností,

e) množina všech posloupností, které nemají limitu,

f) množina všech monotonních posloupností,

g) množina všech klesajících posloupností.

Pro zajímavost

1.1.16

Nechť V je množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$, které nabývají hodnot v absolutní hodnotě nejvýše rovných jedné. Pro každé $f, g \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

a) $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$,

b) $(f+g)(t) = \max\{f(t), g(t)\}$, $(\alpha f)(t) = 0$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$,

c) $(f+g)(t) = \min\{f(t), g(t)\}$, $(\alpha f)(t) = f(t) \left\{ \begin{array}{l} \text{pro } \alpha \neq 0 \\ (0 \cdot f)(t) = 0 \end{array} \right.$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$.

Zjistěte, která z množin V je s takto zavedenými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

Výsledky

1.1.5 a) ne, b) ne. 1.1.6 pouze b),d),h),j). 1.1.7 pouze b),d). 1.1.9 pouze b),g),h). 1.1.10 ne. 1.1.11 ne. 1.1.12 ano. 1.1.13 ano. 1.1.14 a),b) ano. 1.1.15 pouze a),d). 1.1.16 žádná

1.2 Lineární nezávislost

Z teorie je třeba znát pojmy: lineární kombinace (triviální, netriviální), lineárně (ne)závislý soubor (LN, LZ), lineární obal. Je nutné umět rozhodnout, zda má soustava lineárních algebraických rovnic řešení, a pokud má, tak umět aspoň jedno najít. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1.2.1

Zjistěte, zda soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ z $\mathbb{R}^3$ je LZ či LN.

a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.2

Zjistěte, zda soubor vektorů $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4)$ z prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$ je LZ nebo LN, je-li:

a) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vyšetřete LN souboru $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3)$ z příkladu b).

1.2.3

Zjistěte, zda soubor vektorů (x_1, x_2, x_3, x_4) z prostoru $\mathcal{P}$ je LZ nebo LN, je-li pro každé $t \in \mathbb{C}$:

a) $x_1(t) = 3t - 1$, $x_2(t) = 5t$, $x_3(t) = t + 8$, $x_4(t) = t^2 - t + 1$,

b) $x_1(t) = 3t^2 - 1$, $x_2(t) = 5t$, $x_3(t) = t + 8$, $x_4(t) = t^3 - t + 2$,

c) $x_1(t) = 2t^3 + 6$, $x_2(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, $x_3(t) = 2t^2$, $x_4(t) = 2t^3 + 2t^2 - t + 8$.

1.2.4

Zjistěte, zda soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ z prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ je LZ nebo LN, je-li:

a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2-3i \\ -1+i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-2i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6-11i \\ -9+13i \end{pmatrix}$.

Vyšetřete LN tohoto souboru v prostoru $\mathbb{C}^2$.

1.2.5

Nechť (x_1, x_2, x_3) je soubor vektorů z prostoru $\mathcal{P}_3$, $x_1(t) = 1 + t - 2t^2$, $x_2(t) = 7 - 8t + 7t^2$, $x_3(t) = 3 - 2t + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Zjistěte, zda $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$, je-li pro každé $t \in \mathbb{C}$:

a) $x(t) = 5t - 7t^2$,

b) $x(t) = 2 + 4t - t^2$.

1.2.6

Nalezněte všechna α, pro která je soubor vektorů $\left(\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix}\right)$ z prostoru $\mathbb{R}^2$ LN.

1.2.7

Nalezněte všechna α, pro která je soubor vektorů $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$ z prostoru $\mathbb{C}^3$ LZ.

1.2.8

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z prostoru V. Zjistěte, zda je LN nebo LZ soubor:

a) $(\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{z})$,

b) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y})$,

c) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{z}, \vec{x} - \vec{z})$,

d) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{z}, \vec{y} + \vec{z})$,

e) $(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, 4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}, 4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z})$,

f) $(\vec{x}, 2\vec{x}, \vec{y} + \vec{z})$,

g) $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z})$.

1.2.9

Nalezněte všechna α taková, aby soubor vektorů $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3)$ z prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$ byl LZ, je-li:

a) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ i & \alpha + i \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & \alpha + 2 \\ i & \alpha + i \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 2 \\ \alpha^2 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 3\alpha - 3 & -6 \\ -3\alpha^2 + 3\alpha + 2 & -\alpha - 2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 - \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

1.2.10

Jaké podmínce musí vyhovovat čísla α, β, γ, aby soubor vektorů (x, y, z) z prostoru $\mathcal{P}_3$ byl LN, je-li $x(t) = 1 + \alpha t + \alpha^2 t^2$, $y(t) = 1 + \beta t + \beta^2 t^2$, $z(t) = 1 + \gamma t + \gamma^2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$?

1.2.11

Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^3$. Zjistěte, který z vektorů $\vec{x}$ a $\vec{z}$ leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.2.12

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z prostoru V nad T. Zjistěte, který z vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li: $\vec{x}_1 = -5\vec{y} + 4\vec{z}$, $\vec{x}_2 = \vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z}$, $\vec{x}_3 = 2\vec{x} - \vec{y} + 8\vec{z}$, $\vec{u} = \vec{x} + 7\vec{y} - 2\vec{z}$, $\vec{v} = 2\vec{x} - \vec{z}$.

1.2.13

Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte všechna α taková, aby $x \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li:

a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix}$,

b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$,

d) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1.2.14

a) Dokažte, že soubor vektorů $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ z prostoru T^2 je LZ, právě když $x_1 y_2 = x_2 y_1$.

b) Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro lineární závislost souboru vektorů $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)$ z prostoru T^3.

1.2.15

Dokažte, že soubor vektorů $(\vec{x}, \vec{y})$ z prostoru V na tělesem T je LZ, právě když existuje číslo $\alpha \in T$ takové, že buď $y = \alpha x$ nebo $x = \alpha y$. Vysvětlete, proč vynecháním jedné z rovností výrok neplatí.

1.2.16

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z prostoru V nad T. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z}, -\vec{x} + \alpha\vec{z}, \vec{x} + 2\alpha\vec{y} + 8\vec{z})$. Nalezněte všechna $\alpha \in T$ taková, že $\mathcal{Y}$ a vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ leží v lineárním obalu $\mathcal{Y}$.

1.2.17

Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathcal{P}_5$ takový, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí $x_1(t) = 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4$, $x_2(t) = 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4$, $x_3(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
Zjistěte, pro jaká α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ je soubor LZ.

Pro zajímavost

1.2.18

Je následující soubor vektorů LZ $\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix}\right)$ a) v $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{C}$? b) v $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$?

1.2.19

Uvažujme vektorový prostor šipek v rovině (začínajících ve stejném bodě). Co je lineárním obalem dvou vektorů, které leží na jedné přímce? Co je lineárním obalem dvou vektorů, které neleží v jedné přímce? Zamyslete se nad lineárním obalem dvou a tří vektorů v prostoru.

1.2.20

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LZ soubor vektorů z prostoru V nad tělesem T. Existuje vždy číslo $\alpha \in T$ takové, že některý z vektorů $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ je α-násobkem jiného z nich?

1.2.21

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je soubor vektorů z prostoru V takový, že soubory $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x}, \vec{z})$ a $(\vec{y}, \vec{z})$ jsou: a) lineárně závislé, b) lineárně nezávislé. Co lze říci o lineární závislosti resp. nezávislosti souboru $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$?

1.2.22

a) Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z prostoru V. Plyne odtud, že soubory $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x}, \vec{z})$ a $(\vec{y}, \vec{z})$ jsou také LN?

b) Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LZ soubor vektorů z prostoru V. Plyne odtud, že alespoň jeden ze souborů $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x}, \vec{z})$ a $(\vec{y}, \vec{z})$ je také LZ?

1.2.23

Nechť V je vektorový prostor, ve kterém existuje dvojčlenný LN soubor, $\vec{y} \in V$. Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby výrok
$(\forall \vec{x} \in V)(\forall \vec{z} \in V)\,((\vec{x}, \vec{y})\ LZ \wedge (\vec{y}, \vec{z})\ LZ \Rightarrow (\vec{x}, \vec{z})\ LZ)$ byl pravdivý.

1.2.24

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LZ soubor vektorů z prostoru V nad tělesem T. Potom platí: $\vec{z} \neq [\vec{x}, \vec{y}]_\lambda \Rightarrow (\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha\vec{y} \vee \vec{y} = \alpha\vec{x})$. Dokažte. Platí obrácená implikace?

1.2.25

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LZ soubor vektorů z prostoru V takový, že $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} = \vec{0}$. Potom $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda = [\vec{y}, \vec{z}]_\lambda$. Dokažte.

1.2.26

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z prostoru V, $\vec{x} \in V$, $\vec{y} \in V$ takové, že $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}]_\lambda$, ale $\vec{y} \notin [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Potom $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}]_\lambda$. Dokažte.

1.2.27

Nechť $n \geq 2$, $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^n$, $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^{n-1}$ takový, že pro každé $k \in \widehat{m}$ se vektory $\vec{x}_k$ a $\vec{y}_k$ shodují v prvních $(n-1)$ složkách. Jaká je souvislost mezi LZ, resp. LN obou souborů?

1.2.28

Soubor vektorů $(1, x)$ z prostoru reálných čísel nad tělesem racionálních čísel (s obvyklými operacemi) je LN, právě když x je iracionální číslo. Dokažte.

1.2.29

Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ jsou vektory z prostoru $\mathbb{C}^n$, $1 \leq m \leq n$, $\vec{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ pro každé $j \in \widehat{m}$. Nechť $|x_{kk}| > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq k}^{m} |x_{kj}|$ pro každé $k \in \widehat{m}$. Potom jsou vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ LN. Dokažte.

1.2.30

Uvažujme vektorový prostor reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme
$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$
Uvažujme nekonečnou spočetnou množinu $M = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, kde $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$, $e_3(t) = t^2$, $e_4(t) = t^3$ atd. pro každé $t \in \langle a, b\rangle$. Čemu je rovna množina tvořená lineárními kombinacemi všech souborů tvořených konečně mnoha prvky z M?

1.2.31

Uvažujme vektorový prostor reálných funkcí definovaných na

a) intervalu $(0, \pi)$,

b) množině $\{k\pi | k \in \mathbb{N}\}$.

Ověřte, že (f, g) je LN soubor v případě a) a LZ v případě b), je-li $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

1.2.32

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, kde $V = (0, +\infty)$. Pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Rozhodněte, zda je soubor (x, y) LZ, pokud a) $x = 1$, $y = 3$, b) $x = 2$, $y = 3$, c) x, y libovolná kladná čísla.

Výsledky

1.2.1 a) LZ, b) LN, c) LZ. 1.2.2 a) LN, b) LZ, c) LN , LN. 1.2.3 a) LZ, b) LN, c) LZ. 1.2.4 a) LN, b) LZ , LZ. 1.2.5 a) ano, b) ne. 1.2.6 $\alpha \neq 0$ 1.2.7 1, $-\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 1.2.8 a),b),d),g) LN. 1.2.9 a) 41, b) -2,i, c) libovolné, d) neexistuje. 1.2.10 navzájem různá. 1.2.11 $x \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, $z \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. 1.2.12 $u \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, $v \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ 1.2.13 a) libovolné, b) neexistuje, c) $\alpha = 1$, d) $\alpha \neq -2$. 1.2.14 b) $x_1y_2 = x_2y_1 \wedge x_1y_3 = x_3y_1 \wedge x_2y_3 = x_3y_2$ 1.2.15 nemusí 1.2.16 LZ pro $\alpha = 2 \vee \alpha = -4$, ale jen pro $\alpha = 2$ leží vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ v lineárním obalu $\mathcal{Y}$. 1.2.17 LZ pro $\alpha = 8$, $\beta = 20$, $\gamma = -13$. 1.2.18 a) LZ, b) LN. 1.2.21 a) LZ, b) nic. 1.2.22 a) ano, b) ne. 1.2.23 $y \neq \vec{o}$ 1.2.24 ne 1.2.27 $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ LZ $\Rightarrow$ $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ LZ. 1.2.30 $\mathcal{P}$. 1.2.32 a) LZ, b) LZ.

1.3 Báze a dimenze vektorového prostoru

Z teorie je třeba znát pojmy: báze, dimenze, souřadnice vektoru v bázi, standardní báze prostorů T^n, $T^{m,n}$ a $\mathcal{P}_n$.
Je třeba umět: vybrat bázi ze souboru generátorů, doplnit LN soubor na bázi.
Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$. Občas použijeme značení V_n pro prostor V s $\dim V = n$

1.3.1

Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z prostoru V nad tělesem T. Potom $P = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je vektorový prostor nad tělesem T (se zúžením operace $\oplus$ na $P \times P$ a $\odot$ na $T \times P$). Dokažte!

1.3.2

Vyberte ze souboru vektorů $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ z prostoru $\mathbb{C}^4$ nějakou bázi $P = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ a určete $\dim P$, jestliže

a) $n = 3$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,

b) $n = 4$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) $n = 4$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

d) $n = 5$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.3.3

Vyberte ze souboru vektorů $(x_1, \dots, x_n)$ z prostoru $\mathcal{P}$ nějakou bázi $P = [x_1, \dots, x_n]_\lambda$ a určete $\dim P$, je-li pro každé $t \in \mathbb{C}$:

a) $n = 4$, $x_1(t) = 2 - t + 3t^2 + t^3$, $x_2(t) = 1 + 2t + 3t^3$, $x_3(t) = 1 - 8t + 6t^2 - 7t^3$, $x_4(t) = 3 + 2t - t^2 + 2t^3$,

b) $n = 5$, $x_1(t) = 3 - 4t + t^2 + 2t^3$, $x_2(t) = 5 + 26t - 9t^2 - 12t^3$, $x_3(t) = 2 - 5t + 8t^2 - 3t^3$, $x_4(t) = 2 + 3t - 4t^2 + t^3$, $x_5(t) = 1 + 2t + 3t^2 - 4t^3$,

c) $n = 5$, $x_1(t) = 1 + 2t - 3t^2$, $x_2(t) = -2 + 3t + t^2$, $x_3(t) = -1 + 12t - 7t^2$, $x_4(t) = -7t + 5t^2$, $x_5(t) = 3 + t + t^3$.

1.3.4

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi následujícího lineárního obalu souboru vektorů z $\mathbb{C}^4$:

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

1.3.5

Nechť $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4)$ z prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$. Určete $\dim\, [\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4]_\lambda$ v závislosti na parametru α, je-li:

a) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 17 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} \alpha & -4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

1.3.6

Nechť V je vektorový prostor nad T. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je bází V nad T. Nalezněte všechny hodnoty α, pro které je soubor $(\vec{x} + \alpha\vec{y} - \vec{z}, 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, \alpha\vec{x} + \vec{y})$ bází V.

1.3.7

Nechť (x_1, x_2, x_3) je soubor vektorů z prostoru $\mathcal{P}_5$, $x_1(t) = 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4$, $x_2(t) = 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4$, $x_3(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Určete čísla α, β, γ tak, aby $\dim[x_1, x_2, x_3]_\lambda < 3$.

1.3.8

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je soubor vektorů z prostoru V. Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby z něho bylo možno vybrat jedinou bázi $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda$.

1.3.9

Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^3$ byl bází $\mathbb{C}^3$

a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \right)$,

b) $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha+\alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,

c) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$,

d) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1.3.10

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor z prostoru V_n, který je buď lineárně nezávislý nebo generuje prostor V_n. Potom je bází V_n. Dokažte.

1.3.11

Dokažte:

1. Každá báze prostoru $\mathbb{R}^n$ je bází prostoru $\mathbb{C}^n$.
2. Každá báze prostoru $\mathbb{C}^n$, jejíž vektory jsou z prostoru $\mathbb{R}^n$, je bází prostoru $\mathbb{R}^n$.

1.3.12

Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Určete $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$, je-li:

a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -4+11i \\ -1-5i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1+9i \\ 1-5i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 1+i \end{pmatrix}$,

b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 2-3i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 3+i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3+4i \\ -1-5i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1+3i \end{pmatrix}$,

c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 4+2i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3.13

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (tj. $\vec{x} = x \in (0, +\infty)$, $\vec{y} = y \in (0, +\infty)$), $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y$ $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$. Najděte dimenzi a bázi V.

1.3.14

Nalezněte v prostoru $\mathbb{R}^4$ dvě báze tak, aby neměly žádný společný vektor, přičemž jedna báze bude obsahovat vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a druhá báze vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3.15

Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^4$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nalezněte bázi $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, která obsahuje:

a) vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, b) vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.3.16

Nechť $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ je standardní báze prostoru $\mathcal{P}_3$, (x, y, z, u) soubor vektorů z $\mathcal{P}_3$, $x(t) = 1 + t + t^2$, $y(t) = t + t^2$, $z(t) = 1 - t$, $u(t) = 1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

a) Který z vektorů báze $\mathcal{E}$ lze nahradit 1) vektorem x, 2) vektorem y, 3) vektorem z, abychom dostali bázi $\mathcal{P}_3$?

b) Který z vektorů souboru (e_1, z, u) lze nahradit vektorem e_2, abychom dostali bázi $\mathcal{P}_3$?

1.3.17

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^3$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$. Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^3$ a nalezněte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li:

a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$,

d) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$.

1.3.18

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je soubor vektorů z prostoru $\mathcal{P}_2$ nad $\mathbb{R}$, $x \in \mathcal{P}_2$ nad $\mathbb{R}$. Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{P}_2$ nad $\mathbb{R}$ a nalezněte $(x)_{\mathcal{X}}$, je-li:

a) $x_1(t) = (1+i)(1+t)$, $x_2(t) = (1+i)(1-t)$, $x_3(t) = (1-i)(1+t)$, $x_4(t) = (1-i)(1-t)$, $x(t) = 1 + 2i + (1+i)t$,

b) $x_1(t) = 1 + i(1+t)$, $x_2(t) = 2 + i + (3+i)t$, $x_3(t) = 1 + i$, $x_4(t) = i - (1+i)t$, $x(t) = it - 2t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

1.3.19

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou dvě báze $\mathbb{C}^3$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nalezněte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.3.20

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze prostoru V_3, $\vec{x} \in V_3$, $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor vektorů z V_3, $\vec{x} \in V_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je báze V_3 a nalezněte $(\vec{x})_{\mathcal{Y}}$, je-li:

a) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$,

b) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$,

c) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.3.21

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right)$,
$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right)$, jsou soubory vektorů z prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$ a nalezněte $(\mathbb{X})_{\mathcal{Y}}$, je-li:

a) $(\mathbb{X})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$,b) $(\mathbb{X})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.3.22

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze prostoru $\mathbb{C}^3$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(y_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(y_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(y_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathcal{P}_3$, $y \in \mathcal{P}_3$.

Nalezněte $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$, je-li: $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3.23

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze prostoru $\mathcal{P}_3$, $x_1(t) = 2 + 2t - t^2$, $x_2(t) = 2 - t + 2t^2$, $x_3(t) = -1 + 2t + 2t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $(y_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(y_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(y_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$x \in \mathcal{P}_3$, $y \in \mathcal{P}_3$. Nalezněte $(x - 2y)_{\mathcal{E}}$, je-li:

a) $(x)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $(x)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(y)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3.24

Každý jednoprvkový soubor (α), kde $\alpha \neq 0$ je číslo z tělesa T, je bází vektorového prostoru T nad T. Žádné jiné báze neexistují. Dokažte!

1.3.25

Najděte několik bází vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

1.3.26

Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Rozmyslete si, že bází takového prostoru je každá dvojice šipek neležící v jedné přímce. Podobně, každá trojice šipek, které neleží v jedné rovině, je bází vektorového prostoru šipek (začínajících ve stejném bodě) v prostoru.

1.3.27

Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných na

a) intervalu $(0, \pi)$,

b) množině $\{k\pi | k \in \mathbb{N}\}$.

Najděte bázi $[f, g]_\lambda$, je-li $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

Výsledky

1.3.2 a) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, 2; b) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, 2; c) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$, 4; d) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4)$, 3. 1.3.3 a) (x_1, x_2, x_4), 3; b) (x_1, x_4, x_5), 3; c) (x_1, x_2, x_5), 3. 1.3.4 1 pro $\alpha = 1$, 3 pro $\alpha = -3$, 4 pro ostatní α. 1.3.5 a) 3 pro $\alpha = 0$, 4 pro $\alpha \neq 0$; b) 1 pro $\alpha = 1$, 3 pro $\alpha = -3$, 4 pro ostatní α; c) 2 pro $\alpha = 8$, 3 pro $\alpha \neq 8$. 1.3.6 Báze pro $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 3$. 1.3.7 $\alpha = 8$, $\beta = 20$, $\gamma = -13$. 1.3.8 vynecháním všech $\vec{0}$ získáme LN soubor. 1.3.9 a), b), d) neexistuje; c) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$. 1.3.12 a) 2; b) 3; c) 4; 2. 1.3.13 1; (α), $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. 1.3.14 např. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$; 1.3.15 a) $(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$; b) neexistuje; c) $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_1)$. 1.3.16 a) 1) libovolný, 2) e_2 nebo e_3, 3) e_1 nebo e_2; b) žádný. 1.3.17 a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}i\\-i\\1\end{pmatrix}$. 1.3.18 a) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. 1.3.19 $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. 1.3.20 a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$. 1.3.21 a) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}6+3i\\4\\2+i\\-6-3i\end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5-7i\\-4+3i\\3-2i\\-5+6i\end{pmatrix}$. 1.3.22 $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}-12\\0\\-24\end{pmatrix}$, $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}0\\-8\\-4\end{pmatrix}$. 1.3.23 a) $\begin{pmatrix}-12\\0\\-24\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-15\\3\\-15\end{pmatrix}$. 1.3.25 např. $(1, i)$. 1.3.27 a) (f, g), b) (g).

1.4 Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet a průnik podprostorů a znát znění 1. věty o dimenzi.

1.4.1

Nechť $M \subset \mathbb{C}^3$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathbb{C}^3$ a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M, je-li:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \, x_j \text{ je celé číslo pro každé } j \in \widehat{3} \right\}$,

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \, x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$,

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \, 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$,

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \, x_1 = x_2 + x_3 \wedge x_2 = x_1 - 2x_3 \right\}$,

e) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \, x_1 = x_2 + x_3 \vee x_2 = x_1 - 2x_3 \right\}$,

f) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \, \mathrm{Re}(x_2) + \mathrm{Im}(x_3) = 0 \right\}$, kde $\mathrm{Re}(x)$ značí reálnou část a $\mathrm{Im}(x)$ imaginární část komplexního čísla x,

g) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \, x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \wedge 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \wedge x_2 = x_3 \right\}$.

1.4.2

Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$ a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M, je-li:

a) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) = 0\}$,

b) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(0) = 1\}$,

c) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, \text{stupeň } x \text{ je nejvýše } 2\}$,

d) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \langle 0, 1\rangle)(x(t) = x(1-t))\}$,

e) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1))\}$,

f) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\}$.

1.4.3

Nechť $M = \left\{ \mathbb{A} \in T^{n,n} \middle| \left(\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n \right) \left(\exists \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in T^n \right) (\forall i \in \widehat{n})(\forall j \in \widehat{n})(\mathbb{A}_{ij} = x_i + y_j) \right\}$.
Dokažte, že $M \subset\subset T^{n,n}$ a určete dim M.

1.4.4

Nechť M_1 je množina sudých polynomů (mají u lichých mocnin proměnné koeficient 0) z $\mathcal{P}$, M_2 množina lichých polynomů z $\mathcal{P}$ (mají u sudých mocnin proměnné koeficient 0). Dokažte, že $M_1 \subset\subset \mathcal{P}$, $M_2 \subset\subset \mathcal{P}$ a určete dim M_1, dim M_2.

1.4.5

Ukažte, že vektorový prostor T nad T má jen dva podprostory, a to nulový $\{0\}$ a sám sebe T.

1.4.6

Ukažte, že matice s prvky z T rozměru $m \times n$, které mají na předepsaných místech nuly, tvoří podprostor $T^{m,n}$.

1.4.7

Zjistěte zda je $V \subset \mathbb{R}^{2,2}$ podprostorem $\mathbb{R}^{2,2}$

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \middle| x_{11}, x_{22} \in \mathbb{R}, x_{12} = x_{21} \right\}$, tj. V je tvořen symetrickými maticemi,

b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \middle| x_{11}, x_{22} \in \mathbb{R} \right\}$, tj. V je tvořen diagonálními maticemi.

1.4.8

Nechť V je vektorový prostor, $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$, $P \cup Q = V$. Potom $P = V$ nebo $Q = V$. Dokažte.

1.4.9

Nechť V je vektorový prostor, $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$. Potom $P \cup Q \subset\subset V$, právě když $P \subset Q$ nebo $Q \subset P$. Dokažte.

1.4.10

Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $V(\alpha) \subset V$ z příkladu 1.1.14, $V(\alpha) = \left\{ \{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty} \middle| \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha \right\}$.
Zjistěte, pro která α je $V(\alpha) \subset\subset V$ a pro tato α určete dim $V(\alpha)$.

1.4.11

Nechť $M \subset V$ z příkladu 1.1.14, $M = \left\{ \{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty} \middle| \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty \right\}$. Dokažte, že $M \subset\subset V$ a určete dim M.

1.4.12

Nechť $P \subset\subset V_n$, $Q \subset\subset V_n$, dim $P+$ dim $Q > n$. Potom existuje $\vec{x} \in P \cap Q, \vec{x} \neq \vec{0}$. Dokažte.

1.4.13

Dokažte, že součet dvou podprostorů prostoru V je roven průniku všech podprostorů prostoru V obsahujících oba podprostory.

1.4.14

Nechť $P \subset\subset V, Q \subset\subset V, P = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda, Q = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l]_\lambda$. Potom $P+Q = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l]_\lambda$. Dokažte.

1.4.15

Nechť $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ báze P, $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l)$ báze Q. Potom $P + Q$ je direktní, právě když $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l)$ je bází $P + Q$. Dokažte.

1.4.16

Nechť $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$. Potom $P + Q$ je direktní, právě když alespoň jeden vektor $\vec{z} \in P + Q$ se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} \in P$, $\vec{y} \in Q$. Dokažte.

1.4.17

Nechť $P \subset\subset V_n$, $Q \subset\subset V_n$, dim $(P + Q) = 1+$ dim $(P \cap Q)$. Potom $P + Q$ je roven jednomu z obou podprostorů, $P \cap Q$ druhému z nich. Dokažte.

1.4.18

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda,$

b) $P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\lambda,$

c) $P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\},$

d) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1 = x_2 \wedge 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$, $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$.

1.4.19

Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

a) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

b) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

1.4.20

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \wedge 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \wedge 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \right\}.$$

1.4.21

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, $V \subset\subset \mathbb{R}^3$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P \cap Q \cap V$, je-li: $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

1.4.22

Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

b) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

c) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

d) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

e) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \wedge x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}$,
$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| 3x_1 = 2x_2 \wedge x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

1.4.23

Zjistěte, zda je součet podprostorů $P + Q$ z příkladu 1.4.22 direktní.

1.4.24

Nechť $P \subset\subset \mathcal{P}_4$, $Q \subset\subset \mathcal{P}_4$, Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

a) $P = [x_1, x_2]_\lambda$, $Q = [y_1, y_2]_\lambda$, $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 + t^2 + t^3$, $y_1(t) = t^2 + t^3$, $y_2(t) = t + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$,

b) $P = [x_1, x_2]_\lambda$, $(x_1)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2(t) = 3 + 7t - 5t^2 + 2t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$,

$Q = \{x \in \mathcal{P}_4 | (\forall t \in \langle 1, 2\rangle)(x(t) = x(i))\}$,

c) $P = \{x \in \mathcal{P}_4 | (\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = x(-t))\}$, $Q = \{x \in \mathcal{P}_4 | (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1 - t))\}$,

d) $P = \{x \in \mathcal{P}_4 | x(1) = 0\}$, $Q = \{x \in \mathcal{P}_4 | x(2) + x(0) = 0 \wedge x(i) + ix(-i) = 0\}$.

1.4.25

Nechť $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \middle| \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \right\}$, $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \middle| x_1 = x_2 = \ldots = x_n \right\}$. Dokažte, že $P \oplus Q = \mathbb{C}^n$.

1.4.26

Nechť $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n} \middle| x_1 = \ldots = x_n = 0 \right\}$, $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n} \middle| (\forall j \in \widehat{n})(x_j = x_{j+n}) \right\}$. Dokažte, že $P \oplus Q = \mathbb{C}^{2n}$.

1.4.27

Nechť $P = \{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n,n} | (\forall i \in \widehat{n})(\forall j \in \widehat{n})(\mathbb{X}_{ij} = \mathbb{X}_{ji})\}$, $Q = \{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n,n} | (\forall i \in \widehat{n})(\forall j \in \widehat{n})(\mathbb{X}_{ij} = -\mathbb{X}_{ji})\}$. Dokažte, že $P \oplus Q = \mathbb{R}^{n,n}$.

1.4.28

Uvažujte vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Rozmyslete si, jaké vlastní podprostory tento prostor obsahuje. Stejnou úvahu proveďte i pro vektorový prostor šipek v prostoru.

1.4.29

Sestrojte vektorový prostor V a tři podprostory P, Q_1, Q_2 prostoru V tak, aby $P \oplus Q_1 = P \oplus Q_2 = V$, ale $Q_1 \neq Q_2$.

1.4.30

Tři podprostory P, Q, S prostoru V se nazývají nezávislé, právě když každý z nich je disjunktní se součtem druhých dvou (tj. průnik je $\{\vec{0}\}$).

a) Dokažte, že $V = P \oplus (Q \oplus S)$, právě když P, Q, S jsou nezávislé a $V = P + Q + S$.

b) Uveďte příklad tří navzájem disjunktních podprostorů prostoru V, jejichž součtem je V, a přesto nejsou nezávislé.

c) Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je soubor vektorů z V. Potom $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je lineárně nezávislý, právě když podprostory $[\vec{x}]_\lambda$, $[\vec{y}]_\lambda$, $[\vec{z}]_\lambda$ jsou nezávislé. Dokažte.

d) Dokažte, že tři konečnědimenzionální podprostory prostoru V jsou nezávislé, právě když součet jejich dimenzí je roven dimenzi jejich součtu.

1.4.31

Nechť $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$, $S \subset\subset V$.

a) Dokažte, že $P \cap (Q + (P \cap S)) = (P \cap Q) + (P \cap S)$, právě když P, Q, S jsou nezávislé a $V = P + Q + S$.

b) Ukažte, že rovnost $P \cap (Q + S) = (P \cap Q) + (P \cap S)$ neplatí vždy.

Výsledky

1.4.1 a), b) ne, c) 2, $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, d) 1, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, e), f) ne, g) 0, neexistuje. 1.4.2 a) 3, $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4)$, b), c) ne, d) 2, $(e_1, e_2 - e_3)$, e) 1, (e_1), f) 2, $(-4e_1 + e_2 + 7e_3, e_2 - e_4)$. 1.4.3 $2n-1$. 1.4.4 $+\infty$, $+\infty$. 1.4.10 pouze pro $\alpha = 0$, $+\infty$. 1.4.11 $+\infty$. 1.4.18 a) 3, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, 1, $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, b) 2, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 2, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, c) 3, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, 1, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, d) 3, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, 0, neexistuje. 1.4.19 a) dim $(P + Q) = 3$, dim $(P \cap Q) = 1$, báze $P + Q$ je např. $\mathcal{E}_3$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, b) dim $(P + Q) = \dim(P \cap Q) = \dim P = 2$, $\dim Q = 2$, tj. $P + Q = P \cap Q = P = Q$, báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. 1.4.20 dim $(P + Q) = 3$, dim $(P \cap Q) = 1$, báze $P + Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, báze $P \cap Q$

je např. $\left(\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}\right)$. 1.4.21 Platí $P \cap Q \cap V = P$, proto $\dim(P \cap Q \cap V) = 2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 3 \end{pmatrix}\right)$ 1.4.22 a) 3, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, 1, $\left(\begin{pmatrix} -5 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$, b) 4, $\mathcal{E}$, 1, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, c) 3, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$, 2, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$, 1.4.23 pouze e). 1.4.24 a) 4, $\mathcal{E}$, 0, neexistuje, b) 2, (x_1, x_2), 1, (x_1) c) 3, (e_1, e_2, e_3), 1, (e_1), d) 4, $\mathcal{E}$, 1, $(e_1 - e_2)$. 1.4.19 Jsou to pouze přímky jdoucí počátkem a nulový vektor (počátek). V prostoru navíc roviny procházející počátkem.

Kapitola 2

Lineární zobrazení a matice

2.1 Lineární funkcionál

2.1.1

Rozhodněte, které z následujících zobrazení φ je lineárním funkcionálem na prostoru $\mathbb{C}^3$. Pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$:

a) $\varphi(\vec{x}) = x_2 - x_3$,

b) $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$,

c) $\varphi(\vec{x}) = 2x_1 - 3x_2 + ix_3$,

d) $\varphi(\vec{x}) = \mathrm{Re}\ x_2$,

e) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + x_2 + 1$,

f) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2$,

g) $\varphi(\vec{x}) = 0$,

h) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$.

i) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$ za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

2.1.2

Rozhodněte, které z následujících zobrazení φ je lineárním funkcionálem na prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Pro každé $x \in \mathbb{C}$:

a) $\varphi(x) = \mathrm{Im}\ x$,

b) $\varphi(x) = x$,

c) $\varphi(x) = |x|$,

d) $\varphi(x) = 1 - 2\mathrm{Re}\ x$,

e) $\varphi(x) = 3\text{Re } x - 2\text{Im } x$,

f) $\varphi(x) = |\text{Re } x| + |\text{Im } x|$.

2.1.3

Rozhodněte, které z následujících zobrazení φ je lineárním funkcionálem na prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$:

a) $\varphi(\mathbb{X}) = x_{11}x_{12} - x_{21}x_{22}$,

b) $\varphi(\mathbb{X}) = x_{11} + x_{21} - 3x_{22}$,

c) $\varphi(\mathbb{X}) = x_{12} - 2|x_{21}|$,

d) $\varphi(\mathbb{X}) = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4$,

e) $\varphi(\mathbb{X}) = x_{11} + \alpha_1 - 2\alpha_2 + x_{22}$,

f) $\varphi(\mathbb{X}) = x_{11}\alpha_1$,

pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2}$, kde $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $(\mathbb{X})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

2.1.4

Rozhodněte, které z následujících zobrazení φ je lineárním funkcionálem na prostoru $\mathcal{P}_4$:

a) $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$,

b) $\varphi(x) = x(1) - 2x(0)$,

c) $\varphi(x) = x(0) \cdot x(1)$,

d) $\varphi(x) = 2\alpha_0 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + 2\alpha_3$,

e) $\varphi(x) = 3x(i) + 2x(-i) + x(0)$,

f) $\varphi(x) = \alpha_0 + \beta_0 + x(1)$,

pro každé $x \in \mathcal{P}_4$, $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{P}_4$.

2.1.5

Nechť $\mathcal{X}$ je báze prostoru V_n nad tělesem T. Potom ke každému $\varphi \in V_n^{\#}$ existuje právě jedna uspořádaná n-tice $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$ taková, že pro každé $\vec{x} \in V_n$ platí $\varphi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Dokažte.

2.1.6

Nalezněte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$ pro lineární funkcionály φ z příkladu 2.1.1 a) a c), je-li

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

2.1.7

Nalezněte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, $(\varphi)_{\mathcal{Y}^\#}$ pro lineární funkcionály φ z příkladu 2.1.2 a) a e), je-li $\mathcal{X} = (1, i)$, $\mathcal{Y} = (2 + i, 1 - 2i)$.

2.1.8

Nalezněte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$ a $(\varphi)_{\mathcal{Y}^\#}$ pro lineární funkcionály φ z příkladu 2.1.3 b), d) a e), je-li

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

2.1.9

Nalezněte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$ a $(\varphi)_{\mathcal{Y}^\#}$ pro lineární funkcionály φ z příkladu 2.1.4 a), b), d), e) a f), je-li $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $x_3(t) = t^2 - t^3$, $x_4(t) = t^2 + t^3$, $y_1(t) = 1 + t^2$, $y_2(t) = 1 + 2t^3$, $y_3(t) = -t$, $y_4(t) = 2 - t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.1.10

Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ báze $\mathbb{C}^3$. Určete $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, je-li:

a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.1.11

Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^{2,2})^\#$, $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4)$ báze $\mathbb{C}^{2,2}$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Určete $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, je-li:

a) $\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_4 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.12

Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_2^{\#}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ báze $\mathcal{P}_2$, $x_1(t) = 1+t$, $x_2(t) = 1-t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Nechť $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$ je báze $\mathcal{P}_2$. Určete $(\varphi)_{\mathcal{Y}^\#}$, je-li pro každé $t \in \mathbb{C}$:

a) $y_1(t) = 1 - 2t$, $y_2(t) = 3 + 2t$,

b) $y_1(t) = 2 + 12t$, $y_2(t) = 7 + t$.

2.1.13

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^4$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Určete:

a) $(\vec{x}_i^{\#})_{\mathcal{E}^\#}$ pro každé $i \in \widehat{4}$,

b) $(\vec{x}_i^{\#})_{\mathcal{Y}^\#}$ pro každé $i \in \widehat{4}$, je-li $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4)$ báze $\mathbb{R}^4$,

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{y}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.1.14

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{C}^4$,

$\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{C}^4)^{\#}$, $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = (\varphi_2)_{\mathcal{Y}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Určete:

a) $(\varphi_1 - 3\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#}$,

b) $(\varphi_1 - 3\varphi_2)_{\mathcal{Y}^\#}$.

2.1.15

Nechť $M = \left\{ \varphi \in (\mathbb{C}^3)^\# \,\middle|\, \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2) = \frac{7}{3} \wedge \varphi(\vec{x}_1) - 2\varphi(\vec{x}_2) = -\frac{2}{3} \right\}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$, $\psi \in (\mathbb{C})^\#$, $(\psi)_{\mathcal{Y}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zjistěte, zda platí $\psi \in M$.

2.1.16

Zjistěte, zda množina M z příkladu 2.1.15 je podprostorem prostoru $(\mathbb{C}^3)^\#$.

2.1.17

Nechť $\mathcal{X}$ je báze prostoru V_4, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ soubor vektorů z prostoru $V_4^\#$. Zjistěte, zda je lineárně závislý či nezávislý, je-li:

a) $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\varphi_3)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\varphi_4)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$,

b) $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\varphi_3)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\varphi_4)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.1.18

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$. Zjistěte, zda soubor lineárních funkcionálů $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ z prostoru $(\mathbb{C}^3)^\#$ je lineárně závislý či nezávislý, je-li:

a) $(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\varphi_3(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 - 2x_3$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$,

b) $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\varphi_3(\vec{x}) = x_1 - \alpha_1 - \alpha_2 + x_3 + 2\alpha_3$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$,
$(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

2.1.19

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_4$, $x_1(t) = 1 - t^2 + 2t^3$, $x_2(t) = 2 + t + t^2 + 3t^3$, $x_3(t) = -3 + 2t - t^3$, $x_4(t) = 4 + 3t + 2t^2 + 5t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Zjistěte, zda soubor lineárních funkcionálů $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ z prostoru $\mathcal{P}_4^\#$ je lineárně závislý či nezávislý, je-li:

a) $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\varphi_3(x) = x(1) - 2x(-1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_4$,

b) $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = 2x(0) + x(-2)$, $\varphi_3(x) = x(1) + \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_3$ pro každé $x \in \mathcal{P}_4$,

$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$.

2.1.20

Zjistěte, zda soubor lineárních funkcionálů $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ z prostoru $\mathcal{P}^\#$ je lineárně závislý či nezávislý, je-li:

a) $\varphi_1(x) = x(1) - x(0)$, $\varphi_2(x) = x(2)$, $\varphi_3(x) = 2x(1) - 3x(2)$, $\varphi_4(x) = 2x(0) + x(1) + 4x(2)$ pro každé $x \in \mathcal{P}$,

b) $\varphi_1(x) = x(5) - 3x(2) + x(3)$, $\varphi_2(x) = x(2)$, $\varphi_3(x) = x(-1) + 2x(i) - 3x(5)$, $\varphi_4(x) = 2x(-1) - 4x(2) + 3x(3) - x(i)$ pro každé $x \in \mathcal{P}$,

c) $\varphi_1(x) = -2x(-1) + 3x(3) + 2x(1)$, $\varphi_2(x) = x(0) + x(-1) - x(3) - x(1)$, $\varphi_3(x) = 2x(0) - 2x(-1) + 3x(3) + 2x(1)$, $\varphi_4(x) = x(0) - x(-1) + x(1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}$.

2.1.21

Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby soubor lineárních funkcionálů $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ z prostoru $(\mathbb{R}^3)^\#$ byl lineárně závislý, je-li:

a) $\varphi_1(\vec{x}) = 2\alpha x_1 - 23x_2 + 29x_3$, $\varphi_2(\vec{x}) = 7x_1 + \alpha x_2 + 4x_3$, $\varphi_3(\vec{x}) = 5x_1 + 2x_2 + \alpha x_3$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

b) $(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha^2 + 2 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 - \alpha x_3$, $\varphi_3(\vec{x}) = 2x_1 - \alpha x_2 + 2x_3$ pro každé

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

2.1.22

Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby soubor lineárních funkcionálů $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ z prostoru $(\mathbb{C}^{2,2})^\#$ byl lineárně závislý, je-li pro každé $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$:

a) $\varphi_1(\mathbb{X}) = 2x_{11} - x_{12} + 3x_{21} + 4x_{22}$, $\varphi_2(\mathbb{X}) = 4x_{11} - 2x_{12} + 5x_{21} + 6x_{22}$, $\varphi_3(\mathbb{X}) = 6x_{11} - 3x_{12} + 7x_{21} - \alpha x_{22}$, $\varphi_4(\mathbb{X}) = \alpha x_{11} - 4x_{12} + 9x_{21} + 10x_{22}$,

b) $(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_3(\mathbb{X}) = \alpha x_{21}$, $\varphi_3(\mathbb{X}) = x_2 - x_3 - 2\alpha x_4$.

2.1.23

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_3$, $x_1(t) = 1 + t + t^2$, $x_2(t) = 1 + t$, $x_3(t) = 1$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby soubor lineárních funkcionálů $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ z prostoru $(\mathcal{P}_3)^\#$ byl lineárně závislý, je-li:

a) $(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $\varphi_3 = x(-1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$,

b) $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\varphi_3)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha^2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.1.24

Nalezněte bázi jádra lineárního funkcionálu φ z příkladu 2.1.1 a), 2.1.1 c), 2.1.2 a), 2.1.2 e), 2.1.3 b), 2.1.3 d), 2.1.3 e), 2.1.4 a), 2.1.4 b), 2.1.4 d), 2.1.4 e) a 2.1.4 f) (viz př. 2.1.8, 2.1.9).

2.1.25

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$, $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{C}^3)^\#$, $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(\vec{x}) = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Nalezněte bázi jádra lineárního funkcionálu $\varphi_1 - 2\varphi_2$.

2.1.26

Nalezněte bázi jádra lineárního funkcionálu $3\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3$ z příkladu 2.1.19 a).

2.1.27

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_3$, $x_1(t) = 1 + t^2$, $x_2(t) = 1 - t^2$, $x_3(t) = t + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathcal{P}_3)^\#$, $\varphi_1(\vec{x}) = x(i) - x(0)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, $(\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 + i \end{pmatrix}$. Nalezněte bázi $\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$.

2.1.28

Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathcal{P}_3)^\#$, $\varphi_1(x) = x(-1)$, $\varphi_2(x) = x(1) - 2x(0)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$. Nalezněte bázi $\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$.

2.1.29

Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^{2,2})^{\#}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = x_{11} - x_{12} + x_{21}$. Nalezněte bázi
$\ker \varphi \cap \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

2.1.30

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$, $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^{\#}$, $\varphi_1(\vec{x}) = x_1 - x_2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_2)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nalezněte bázi $\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$.

2.1.31

Nalezněte bázi průniku jader lineárních funkcionálů z příkladů: a) 2.1.1 a), 2.1.1 c), b) 2.1.2 a), 2.1.2 e), c) 2.1.3 d), 2.1.3 e), je-li $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, d) 2.1.4 a), 2.1.4 b) a 2.1.4 f), je-li $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $x_3(t) = t^2 - t^3$, $x_4(t) = t^2 + t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.1.32

Řešte rovnici $\varphi(x) = 2$, je-li φ lineární funkcionál z příkladu: a) 2.1.1 a), b) 2.1.2 e), c) 2.1.3 b), d) 2.1.4 b).

2.1.33

Nechť $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ je soubor lineárních funkcionálů z příkladu 2.1.18 b). Řešte rovnici:

1. $\varphi_1(\vec{x}) - \varphi_2(\vec{x}) - 4\varphi_3(\vec{x}) = 1$,
2. $\varphi_1(\vec{x}) = 2\varphi_2(\vec{x}) + 3\varphi_3(\vec{x})$,
3. $2\varphi_1(\vec{x}) + 1 = \varphi_2(\vec{x}) - \varphi_3(\vec{x})$.

2.1.34

Nechť $M = \left\{\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#} | \varphi(\vec{x}_1) = \varphi(\vec{x}_2)\right\}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $M \subset\subset (\mathbb{C}^3)^{\#}$, určete $\dim M$ a nalezněte bázi M.

2.1.35

Nechť $M = \left\{\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#} | \varphi(\vec{x}_1) - 2\varphi(\vec{x}_2) = 0 \wedge 3\varphi(\vec{x}_1) + 2\varphi(\vec{x}_2) = 0\right\}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Dokažte, že $M \subset\subset (\mathbb{C}^3)^{\#}$, určete $\dim M$ a nalezněte bázi M.

2.1.36

a) Nechť $\{\beta_k\}_{k=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Definujme zobrazení φ prostoru $\mathcal{P}$ do $\mathbb{C}$ takto: $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_j$, kde $x(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Dokažte, že $\varphi \in \mathcal{P}^\#$.

b) Ke každému $\varphi \in \mathcal{P}^\#$ existuje posloupnost komplexních čísel $\{\beta_k\}_{k=0}^{+\infty}$ taková, že pro každé $x \in \mathcal{P}$, $x(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$ pro všechna $t \in \mathbb{C}$, je $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_j$. Dokažte.

2.1.37

Nechť $\emptyset \neq S \subset V_n$. Označme $S^0 = \big\{\varphi \in V_n^\# | (\forall \vec{x} \in S)(\varphi(\vec{x}) = 0)\big\}$.

a) Dokažte, že $S^0 \subset\subset V_n^\#$,

b) určete dim S^0, je-li $S \subset\subset V_n$, dim $S = k$.

2.1.38

Nechť φ je nenulový lineární funkcionál na prostoru V nad tělesem T, $\alpha \in T$. Potom existuje $\vec{x} \in V$ takový, že $\varphi(\vec{x}) = \alpha$. Dokažte.

2.1.39

Nechť (φ_1, φ_2) je soubor lineárních funkcionálů na prostoru V nad tělesem T, nechť ker $\varphi_1 \subset$ ker φ_2. Potom existuje $\alpha \in T$ takové, že $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$. Dokažte.

2.1.40

Dokažte, že ke každému $\vec{x} \in V_n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, existuje $\varphi \in V_n^\#$ takový, že $\varphi(\vec{x}) \neq 0$.

2.1.41

Nechť $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ je soubor lineárních funkcionálů na prostoru V_n, $m < n$. Potom existuje $\vec{x} \in V_n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, takový, že $\varphi_j(\vec{x}) = 0$ pro každé $j \in \widehat{m}$. Dokažte.

2.1.42

Ke každému nenulovému $\varphi \in V_n^\#$ existuje báze $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ prostoru V_n taková, že $\varphi(\vec{x}_i) \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{n}$. Dokažte.

Výsledky

2.1.1 pouze a), c), g), h), i). 2.1.2 pouze a), e). 2.1.3 pouze b), d), e). 2.1.4 a), b), d), e), f). 2.1.6 a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -i \\ -11+2i \\ 7+4i \end{pmatrix}$. 2.1.7 a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2.1.8 b) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\5\\-3\end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix}-4\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-6\\-4\\-8\end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\-1\\7\end{pmatrix}$.
2.1.9 a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}$, d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-1\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\17\\1\\11\end{pmatrix}$,
e) $\begin{pmatrix}6\\i\\-5\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6+i\\6-i\\-5+i\\-5-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6-2i\\-i\\12-i\end{pmatrix}$, f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\9\\-3\\7\end{pmatrix}$. 2.1.10 a) $\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}13\\0\\1\end{pmatrix}$,
c) $\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix}$. 2.1.11 a) $\begin{pmatrix}-6\\-8\\5\\0\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}269\\21\\-205\\5\end{pmatrix}$. 2.1.12 a) $\frac{1}{2}(5,7)$, b) $(-3,10)$. 2.1.13 a) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}7\\13\\18\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-13\\-20\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\5\\2\end{pmatrix}$. 2.1.14 a) $\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\-9\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\\1\end{pmatrix}$.
2.1.15 ano. 2.1.16 ne. 2.1.17 a) LZ, b) LN. 2.1.18 a) LN, b) LZ. 2.1.19 a) LN, b) LZ. 2.1.20 a) LZ, b) LN, c) LZ. 2.1.21 a) 3, b) neexistuje. 2.1.22 a) ± 8, b) 0,-2. 2.1.23 a) $-\frac{1}{3}, -1$, b) $0, 1, \pm i$.
2.1.24 2.1.1a) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, 2.1.1c) $\left(\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2i\end{pmatrix}\right)$, 2.1.2a) (1), 2.1.2e) $(2+3i)$,
2.1.3b) $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, 2.1.3d) $\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&0\\4&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\right)$,
2.1.3e) $\left(\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, 2.1.4a) $(e_1-e_2, e_1-e_3, e_1-e_4)$,
2.1.4b) $(e_1+e_2, e_1+e_3, e_1+e_4)$, 2.1.4d) $(e_1+5e_2, e_3, -6e_1+5e_4)$,
2.1.4e) $(e_1+6ie_2, 5e_1+6e_3, e_1-6ie_4)$, 2.1.4f) $(-3e_1+5e_2, 2e_1-5e_3, 2e_1-5e_4)$. 2.1.25 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
2.1.26 $(5e_1+4e_2+7e_3+6e_4, 4e_1-2e_2-e_3+3e_4, 5e_1+4e_2+3e_3+6e_4)$. 2.1.27 (e_1, e_2+ie_3).
2.1.28 (e_1+e_2). 2.1.29 $\left(\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&5\\3&2\end{pmatrix}\right)$. 2.1.30 $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. 2.1.31 a) $\left(\begin{pmatrix}3-i\\2\\2\end{pmatrix}\right)$, b) neexistuje, c) $\left(\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10&17\\0&6\end{pmatrix}\right)$, (e_3-e_4). 2.1.32 1. $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, 2. $-i+[2+3i]_\lambda$,
3. $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, 4. $-2e_1+[e_1+e_2, e_1+e_3, e_1+e_4]_\lambda$. 2.1.33 1. nemá řešení, 2. $-i+[2+3i]_\lambda$, 3. $\left[\begin{pmatrix}5\\17\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}19\\3\\-12\end{pmatrix}\right]_\lambda$, 4. $\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}5\\13\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}41\\67\\-38\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 2.1.34 2, $(\vec{e}_1^{\#}, \vec{e}_2^{\#})$.
2.1.35 1, $(\vec{e}_1^{\#}+\vec{e}_2^{\#}-5\vec{e}_3^{\#})$. 2.1.37 b) $n-k$.

2.2 Lineární zobrazení, lineární operátor

2.2.1

Zjistěte, které z následujících zobrazení A z prostoru $\mathbb{C}^3$ do $\mathbb{C}^2$ je lineární:

a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{Im}\,(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$,

b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

d) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$,

e) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$,

f) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$,

pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2.2.2

Zjistěte, které z následujících zobrazení A z prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ do $\mathbb{R}^4$ je lineární:

a) $A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{11} - x_{12} \\ x_{11} + 2x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$,

b) $A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ -x_{11} \\ x_{11} + x_{21} - x_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$,

c) $A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d) $A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ |x_{11}| \\ x_{12} \\ -x_{12} \end{pmatrix}$,

pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.

2.2.3

Zjistěte, které z následujících zobrazení A z prostoru $\mathcal{P}_2$ do $\mathbb{C}^4$ je lineární:

a) $Ax = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 \\ \alpha_0 - 1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \\ -\alpha_0 \end{pmatrix},$

b) $Ax = \begin{pmatrix} 3\alpha_0 - 2\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{pmatrix},$

c) $Ax = \begin{pmatrix} \alpha_0\alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix},$

d) $Ax = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \end{pmatrix},$

pro každé $x \in \mathcal{P}_2$, $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.4

Zjistěte, které z následujících zobrazení A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{P}$:

a) $(Ax)(t) = x(t+1)$,

b) $(Ax)(t) = x(2t-1) - x(t+1)$,

c) $(Ax)(t) = t \cdot x(t)$,

d) $(Ax)(t) = x(t) - x(0)$,

pro každé $x \in \mathcal{P}$. Který z nich je lineární operátor na prostoru $\mathcal{P}_n$?

2.2.5

Nechť $\varphi \in V_n^{\#}$, $\vec{x}_0 \in V_n$. Zjistěte, které z následujících zobrazení A je lineární operátor na prostoru V_n. Pro každé $\vec{x} \in V_n$:

a) $A\vec{x} = \varphi(\vec{x})\vec{x}_0$,

b) $A\vec{x} = \varphi(\vec{x}_0)\vec{x}$,

c) $A\vec{x} = \varphi(\vec{x})\vec{x}$,

d) $A\vec{x} = \varphi(\vec{x}_0)\vec{x}_0$.

2.2.6

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze prostoru V_3. Zjistěte, které z následujících zobrazení A je lineární operátor na prostoru V_3. Pro každé $\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$:

a) $A\vec{x} = \vec{x}_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{x}_2 + \alpha_2\vec{x}_3$,

b) $A\vec{x} = \alpha_2\vec{x}_1 + \alpha_3\vec{x}_2 + \alpha_1\vec{x}_3$,

c) $A\vec{x} = (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)(\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3)$,

d) $A\vec{x} = |\alpha_1|\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3$.

2.2.7

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2\right)$ z příkladu 2.2.1 b). Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}}$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^2$.

2.2.8

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, ${}^{\mathcal{Y}}A$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2.2.9

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

2.2.10

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Sestavte:

a) ${}^{\mathcal{E}_3}A$,

b) ${}^{\mathcal{Y}}A$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2.2.11

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Nalezněte $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.2.12

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{2,2}, \mathbb{R}^4\right)$ z příkladu 2.2.2 a). Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$,
kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$,
$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^4$.

2.2.13

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{P}_2, \mathbb{C}^4\right)$ z příkladu 2.2.3 b). Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_2$, $x_1(t) = 2 - 3t$, $x_2(t) = 1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $\mathcal{Y} = (\vec{e}_4, -3\vec{e}_1, \vec{e}_2, -2\vec{e}_3)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^4$.

2.2.14

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{P}_3\right)$, $(Ax)(t) = x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, $t \in \mathbb{C}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_3$, $x_1(t) = t - t^2$, $x_2(t) = 1 - t + t^2$, $x_3(t) = -1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.15

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(V_3\right)$ z příkladu 2.2.6 b). Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, ${}^{\mathcal{Y}}A$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{X}}$, kde
$\mathcal{Y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)$ je báze prostoru V_3.

2.2.16

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^3, \mathcal{P}_2\right)$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2$, $A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = x_3$, kde $x_1(t) = 2+3t$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 1 + 4t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

2.2.17

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2\right)$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

2.2.18

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^{2,2}, \mathcal{P}_3\right)$, $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x_1$, $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_2$, $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_3$, $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = x_3$,
kde

a) $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1 + t$, $x_3(t) = 1 + t + t^2$,

b) $x_1(t) = 1 + t^2$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 1 + t + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}$, kde $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$, $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, $z_1(t) = 1 + t + t^2$, $z_2(t) = 1 + t - t^2$, $z_3(t) = 1 - t - t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.19

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^3\right)$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A$.

2.2.20

Nechť $A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{P}_3\right)$, $Ae_j = x_j$ pro každé $j \in \widehat{3}$, $x_1(t) = 1 + t^2$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 1 + t + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, kde $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_3$, $y_1(t) = 1 + t + t^2$, $y_2(t) = 1 + t - t^2$, $y_3(t) = 1 - t - t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.21

Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{C}$ jsou definovány následovně $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = (-3)$. Sestavte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$ funkcionálu φ, který je pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ definován jako $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Operátor derivování a integrování

Na prostoru $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}_n$) zavedeme dvě důležitá zobrazení D a S takto: pro každé $x \in \mathcal{P}$, $x(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^j$, je $(Dx)(t) = \sum_{j=1}^{k} j\alpha_j t^{j-1}$, $(Sx)(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j}{j+1} t^{j+1}$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Pak $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n-1})$, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$ a D nazýváme **operátor derivování**, S **operátor integrování**.

2.2.22

Nechť D je operátor derivování. Sestavte

a) ${}^{\mathcal{E}_n}D$,

b) ${}^{\mathcal{X}}D$, kde $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_n$, $x_i(t) = \dfrac{(t-\alpha)^{i-1}}{(i-1)!}$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $i \in \widehat{n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

c) ${}^{\mathcal{E}_n}D^{\mathcal{E}_{n-1}}$.

2.2.23

Nechť $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_n}S^{\mathcal{E}_{n+1}}$.

2.2.24

Dokažte, že zobrazení T definované na prostoru $\mathcal{P}_n$ takto: $(Tx)(t) = t(Dx)(t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_n$, $t \in \mathbb{C}$, je lineární operátor na prostoru $\mathcal{P}_n$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_n}T$.

2.2.25

Nechť $A : \mathbb{C}^{2,2} \to \mathbb{C}^{2,2}$, $A\mathbb{X} = \mathbb{X}^T$ (tj. matici $\mathbb{X}$ přiřadí matici transponovanou) pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{2,2}$.

a) Dokažte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2,2})$.

b) Sestavte ${}^{\mathcal{E}}A$.

2.2.26

Nechť $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$, $A, B : \mathbb{C}^{2,2} \to \mathbb{C}^{2,2}$, $A\mathbb{X} = \mathbb{C}\mathbb{X}$, $B\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{C}$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{2,2}$.

a) Dokažte, že $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2,2})$.

b) Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, ${}^{\mathcal{X}}B$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

2.2.27

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2,2})$, $A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbb{X}$, $B\mathbb{X} = \mathbb{X}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, ${}^{\mathcal{X}}B$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$.

2.2.28

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Sestavte matici projektoru na P podle Q v bázi $(-\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$.

2.2.29

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Nechť A je projektor na Q podle P. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{R}^3$.

2.2.30

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. Nechť A je projektor na P podle Q, B je projektor na Q podle P. Sestavte ${}^{\mathcal{E}}A$, ${}^{\mathcal{E}}B$.

2.2.31

Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T, $\mathcal{X}$ báze V_n, $\mathcal{Y} = (\alpha)$ báze T, $\varphi \in V_n^{\#}$. Potom $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \alpha \cdot {}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$. Dokažte.

2.2.32

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{C}^3)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$, $x_1(t) = 1 - t$, $x_2(t) = 1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{Z}}$, kde $\mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$.

2.2.33

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$.

2.2.34

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$, $x_1(t) = 1 + 2t + t^2$, $x_2(t) = 1 + t + 2t^2$, $x_3(t) = 2 + t + t^2$, $y_1(t) = -1 + 2t$, $y_2(t) = 2 - t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

2.2.35

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^{2,2})$, ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sestavte:

a) ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{E}_4}$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,

b) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$,

c) ${}^{\mathcal{Z}}A^{\mathcal{U}}$, $\mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{U} = \left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

2.2.36

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $x_1(t) = t^2$, $x_2(t) = t + t^2$, $x_3(t) = 1 - t - t^2$, $y_1(t) = 1 + t^2$, $y_2(t) = 1 - t$, $y_3(t) = -t + t^2 + t^3$, $y_4(t) = t^2 + t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Sestavte ${}^{\mathcal{Z}}A^{\mathcal{U}}$, $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3)$, $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $z_1(t) = 1 + t + t^2$, $z_2(t) = 1 + t^2$, $z_3(t) = -1 + t^2$, $u_1(t) = 1 + t$, $u_2(t) = t^2 + t^3$, $u_3(t) = 1 + t^3$, $u_4(t) = -1$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.37

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, ${}^{\mathcal{E}_3}A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1(t) = t - t^2$, $x_2(t) = 1 - t + t^2$, $x_3(t) = -1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.38

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}$. $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, $\mathcal{Y} = (2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3, 3\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3)$.

2.2.39

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_4)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ je báze V_4. Sestavte:

a) ${}^{\mathcal{Y}}A$, $\mathcal{Y} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_4)$,

b) ${}^{\mathcal{Z}}A$, $\mathcal{Z} = (\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4)$.

2.2.40

Určete $h(A)$, $d(A)$ a nalezněte bázi jádra zobrazení A z příkladů: a) 2.2.2a), b) 2.2.16, c) 2.2.20, d) 2.2.38.

2.2.41

Určete hodnost a defekt operátoru derivování definovaného na prostoru a) $\mathcal{P}_n$, b) $\mathcal{P}$ a nalezněte bázi jeho jádra.

2.2.42

Nechť $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$. Určete $h(S)$, $d(S)$ a nalezněte bázi jádra zobrazení S.

2.2.43

Určete hodnost a defekt operátoru integrování definovaného na prostoru $\mathcal{P}$ a nalezněte bázi jeho jádra.

2.2.44

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Řešte rovnici $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.2.45

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

a) Nalezněte bázi prostoru $A(\mathbb{C}^4)$.

b) Najděte bázi jádra.

c) Řešte rovnici $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2.46

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2,2}, \mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

a) Nalezněte bázi prostoru $A(\mathbb{C}^{2,2})$, určete hodnost $h(A)$ a defekt $d(A)$.

b) Řešte rovnici $A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2.47

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^2)$, $Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Ax_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1(t) = 1 - t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = 1 + t$. Nalezněte $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

2.2.48

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$. Řešte rovnici $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

2.2.49

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2)$, $(Ax)(t) = (Dx)(2t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte $A^{-1}(u)$, je-li $u(t) = 2 + 3t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.50

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\\\alpha & 2\end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = 1$, $y_3(t) = t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Řešte rovnici $Ax = z$, je-li $z(t) = t + 7t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.2.51

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 3\end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{Y}}B = \begin{pmatrix}4 & 6\\6 & 9\end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right)$. Nalezněte ${}^{\mathcal{Y}}(2A - 3B)$.

2.2.52

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ jsou báze $\mathbb{R}^2$, $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$ a nechť pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ platí $B\vec{x} = \begin{pmatrix}\alpha - 2\beta\\\alpha\end{pmatrix}$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(A + 2B)^{\mathcal{X}}$.

2.2.53

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$, ${}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\1 & -3 & -1 & -1\\0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{E}_3}B^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 2 & -1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Nalezněte a) ${}^{\mathcal{E}_4}(AB)$, b) ${}^{\mathcal{E}_3}(BA)$.

2.2.54

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, ${}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{E}_3}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_4}(BA)$.

2.2.55

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V_2)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{Y}}B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, $\mathcal{Z}$ jsou báze prostoru V_2, $(\vec{x}_1)_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $(\vec{x}_2)_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_1)_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{Z}}(AB)$.

2.2.56

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2)$, ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{E}_3}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$, $y_1(t) = 1 + t$, $y_2(t) = 1 - t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{Z}}(BA)^{\mathcal{E}_2}$, kde $\mathcal{Z} = (z_1, z_2)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_2$, $z_1(t) = 1 - 2t$, $z_2(t) = 2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Je BA izomorfismus?

2.2.57

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^{2,2})$, $Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Ax_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_1(t) = 2 + t$, $x_2(t) = 1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,

$\mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right)$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}(BA)^{\mathcal{Z}}$.

2.2.58

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$, $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}(BA)^{\mathcal{Z}}$.

2.2.59

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^{\#}$, ${}^{\mathcal{E}_2}\varphi^{\mathcal{Z}} = (1, 1)$, $\mathcal{Z} = (3)$. Nalezněte matici zobrazení φA ve standardních bázích a bázi jádra φA.

2.2.60

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(Bx_1)(t) = 1$, $(Bx_2)(t) = t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$, $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{Y}}(A + B)^{\mathcal{X}}$, kde $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_2$, $y_1(t) = 2$, $y_2(t) = 4 - 2t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.61

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{P}_3)$, $(A\alpha)(t) = 2\alpha + \alpha t^2$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$, $\varphi \in (\mathcal{P}_2)^{\#}$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

a) Určete $h(A)$.

b) Nalezněte matici zobrazení $A\varphi$ ve standardních bázích.

2.2.62

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2,2}, \mathcal{P}_3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^3)$, ${}^{\mathcal{E}_3}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = x_1$, $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x_2$, $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_3$, $A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_4$, $x_1(t) = t + t^2$, $x_2(t) = t - t^2$, $x_3(t) = 1$, $x_4(t) = t - \alpha t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Určete hodnost zobrazení BA v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.2.63

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, ${}^{\mathcal{E}_3}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Určete hodnost zobrazení BA v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.2.64

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^{2,2})$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\varphi \in (\mathbb{C}^{2,2})^{\#}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right) = x_{11} + x_{22}$. Nalezněte bázi jádra zobrazení φA.

2.2.65

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$, ${}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1(t) = 1 + t^2$, $x_2(t) = 1 - t^2$, $x_3(t) = t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $\varphi \in (\mathcal{P}_3)^{\#}$, $\varphi(x) = x(1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$. Nalezněte bázi jádra zobrazení φA.

2.2.66

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathcal{P}_4)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\varphi \in (\mathcal{P}_4)^{\#}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}x(1) + \frac{1}{2}x(-1)$ pro každé $t \in \mathcal{P}_4$. Nalezněte bázi jádra zobrazení φA.

2.2.67

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$, ${}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & -1 \\ 2 & \alpha - 2 & 0 & \alpha - 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^3 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1(t) = 1 - t$, $x_2(t) = t - t^2$, $x_3(t) = t^2 - t^3$, $x_4(t) = t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Určete hodnost zobrazení $A + B$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.2.68

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathcal{P}_2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{C}^2)$ ${}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$, $x_1(t) = 1 - t$, $x_2(t) = 1$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Řešte rovnici $(AB)x = z$, je-li $z(t) = 2t - 4$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

2.2.69

Nechť $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ jako $A\vec{x} = (\vec{x})_{\mathcal{X}}$, kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$. Najděte $A\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$, $A\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} \right)$, $A^{-1}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$, $A^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} \right)$. Je A epimorfní, monomorfní?

2.2.70

Nechť $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ jako $A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{\#}(\vec{x}) \\ \vec{x}_2^{\#}(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$.

Najděte $A\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}\right)$, $A\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda\right)$, $A^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$, $A^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda\right)$. Je A epimorfní, monomorfní?

2.2.71

Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je lineárně nezávislý soubor vektorů z prostoru V_n, $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ soubor vektorů z prostoru Q. Potom existuje lineární zobrazení A prostoru V_n do Q takové, že $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \widehat{k}$. Dokažte. Uveďte příklad takového lineárního zobrazení. Nalezněte nutnou a postačující podmínku, aby A bylo určeno jednoznačně.

2.2.72

Jak se změní matice lineárního zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, jestliže

a) v bázi $\mathcal{X}$ zaměníme i-tý a j-tý vektor,

b) v bázi $\mathcal{Y}$ zaměníme i-tý a j-tý vektor,

c) i-tý vektor báze $\mathcal{X}$ vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$,

d) i-tý vektor báze $\mathcal{Y}$ vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$?

2.2.73

Uveďte příklad lineárního operátoru A na prostoru V_3, který má následující vlastnost: a) $h(A) = 2$, b) $d(A) = 2$, c) $A(V_3) \cap \ker A \neq \left\{\vec{0}\right\}$, d) $h(A) = d(A) = 2$.

2.2.74

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ takové, že $AB = \Theta$. Plyne odtud, že také $BA = \Theta$? Uveďte vhodné příklady.

2.2.75

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte, že zobrazení, které každému $X \in \mathcal{L}(V)$ přiřazuje operátor AX je lineární operátor na prostoru $\mathcal{L}(V)$.

2.2.76

Určete dimenzi vektorového prostoru $\mathcal{L}(P_m, Q_n)$.

2.2.77

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$.

a) Dokažte, že množina všech $B \in \mathcal{L}(V_n)$ takových, že $AB = \Theta$, je podprostorem prostoru $\mathcal{L}(V_n)$, a určete jeho dimenzi.

b) Dokažte, že množina všech $B \in \mathcal{L}(V_n)$ takových, že $BA = \Theta$, je podprostorem $\mathcal{L}(V_n)$, a určete jeho dimenzi.

2.2.78

Nechť $M \subset\subset V_n$, $\dim M = m$. Dokažte, že množina všech $A \in \mathcal{L}(V_n)$ takových, že $M \subset \ker A$, je podprostorem prostoru $\mathcal{L}(V_n)$ a určete jeho dimenzi.

2.2.79

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_1)$. Potom existuje právě jedno číslo $\alpha \in T$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in V_1$ je $A\vec{x} = \alpha\vec{x}$. Dokažte.

2.2.80

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $h(A) = 1$. Potom existuje právě jedno číslo $\alpha \in T$ takové, že $A^2 = \alpha A$. Dokažte.

2.2.81

Nechť $A, B, C \in \mathcal{L}(V_2)$. Potom operátor $(AB - BA)^2$ komutuje s operátorem C. Dokažte.

2.2.82

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ takové, že operátor $AB - BA$ komutuje s operátorem A. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$A^n B - BA^n = nA^{n-1}(AB - BA).$$

2.2.83

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$ takový, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_n$ je $(Ax)(t) = x(t+1)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Potom $A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} D^k$, kde D je operátor derivování na prostoru $\mathcal{P}_n$. Dokažte.

2.2.84

Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze prostoru V_n nad tělesem T, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ navzájem různá čísla z T, $A \in \mathcal{L}(V_n)$ definovaný takto: $A\vec{x}_j = \alpha_j \vec{x}_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$. Nechť $B \in \mathcal{L}(V_n)$, který komutuje s operátorem A. Potom existují čísla $\beta_1, \dots, \beta_n \in T$ taková, že $B\vec{x}_j = \beta_j \vec{x}_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$. Dokažte.

2.2.85

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, který komutuje s každým lineárním operátorem $B \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom existuje číslo $\alpha \in T$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in V_n$ je $A\vec{x} = \alpha\vec{x}$. Dokažte.

2.2.86

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ takové, že $2A - B \neq I$. Potom $A^2 = A$, právě když $B^2 = I$. Dokažte.

2.2.87

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom $AB - BA \neq I$. Dokažte.

2.2.88

Ukažte, že tvrzení z předcházejícího příkladu neplatí, je-li $\dim V = +\infty$.

2.2.89

Proč žádné zobrazení $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ není lineární?

2.2.90

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Definujeme zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisem $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Zkontrolujte, že operátory A určené následujícími maticemi $\mathbb{A}$ působí tak, jak je uvedeno v závorkách.

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ($A$ je zrcadlení nebo osová souměrnost podle osy x.)

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ($A$ je zrcadlení nebo osová souměrnost podle osy $x = y$.)

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ($A$ je středová souměrnost.)

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, ($A$ je rotace o úhel θ po směru hodinových ručiček, matici se říká elementární matice rotací.)

e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ($A$ je prodloužení resp. zkrácení ve směru x.)

f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ($A$ je zkosení ve směru x.)

2.2.91

Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť $A : P \to Q$ je izomorfismus. Ověřte, a zapamatujte si!

a) $\dim P = \dim Q$.

b) Je-li $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ LN soubor, pak $(A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_n)$ je LN. (Na toto tvrzení stačí A monomorfní.)

c) Je-li $P_1 \subset\subset P$ a $\dim P_1 = k$, pak $A(P_1) \subset\subset Q$ (na to stačí linearita A) a $\dim A(P_1) = k$.

d) Je-li $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze P, pak $(A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_n)$ je báze Q.

e) Analogická tvrzení platí i pro A^{-1}.

2.2.92

Jak je možné, že funkcionál $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaný pro všechna $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ jako

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

není prostý, ačkoli $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$?

2.2.93

Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě – počátku) v rovině. Nechť je dána přímka p procházející počátkem. Rozmyslete si, že zobrazení, které každému vektoru přiřadí jeho kolmou projekci na přímku p, je lineární a že jeho jádrem je přímka q procházející počátkem a kolmá na p a jeho oborem hodnot je přímka p. Rozmyslete si analogickou úlohu v prostoru, tj. kolmou projekci vektorů na rovinu procházející počátkem.

Výsledky

2.2.1 pouze b), c), f). 2.2.2 pouze a), b). 2.2.3 pouze b). 2.2.4 každé, pouze a), b), d). 2.2.5 a), b) ano, c) jen pro $\varphi = \Theta$, d) pouze když $\varphi(\vec{x}_0) = 0$. 2.2.6 pouze b), c). 2.2.7 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & -i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -i & -2-i & -2-i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1+2i & -1+3i & -1+2i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2.2.8 a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2.2.9 $\begin{pmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{pmatrix}$. 2.2.10 a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -6 & -9 & -5 \\ 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$. 2.2.11 $\begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$. 2.2.12 $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2.2.13 $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 2.2.14 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2.2.15 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2.2.16 + 2.2.17 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2.2.18 a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&2&-1\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}$. 2.2.19 $\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. 2.2.20 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2.2.21 ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}} = \left(-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

2.2.22 a) $\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&n-1\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&n-1\end{pmatrix}$.

2.2.23 $\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0\\1&0&0&\dots&0\\0&\frac{1}{2}&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&\frac{1}{n}\end{pmatrix}$. 2.2.24 $\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&n-1\end{pmatrix}$. 2.2.25 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2.2.26 b) $\begin{pmatrix}\alpha&\beta&0&0\\\gamma&\delta&0&0\\0&0&\alpha&\beta\\0&0&\gamma&\delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha&0&\gamma&0\\0&\alpha&0&\gamma\\\beta&0&\delta&0\\0&\beta&0&\delta\end{pmatrix}$. 2.2.27 $\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&2&0&0\\0&-3&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

2.2.28 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$. 2.2.29 $\begin{pmatrix}-4&-5&-3\\0&0&0\\4&5&3\end{pmatrix}$. 2.2.30 $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6&-2&-14&-10\\2&1&-3&-5\\-2&4&8&0\\0&-5&-5&5\end{pmatrix}$,

$\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&2&14&10\\-2&9&3&5\\2&-4&2&0\\0&5&5&5\end{pmatrix}$. 2.2.32 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\\3&-1\end{pmatrix}$. 2.2.33 $\begin{pmatrix}15&0\\23&1\\13&1\end{pmatrix}$. 2.2.34 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&0&-2\\-7&3&1\end{pmatrix}$.

2.2.35 a) $\begin{pmatrix}0&3&1\\2&3&1\\4&3&1\\2&1&1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}4&-2&3\\0&2&-2\\-1&1&-1\\-2&0&0\end{pmatrix}$, c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&9&1\\-11&-15&-5\\3&3&1\\13&17&7\end{pmatrix}$. 2.2.36 $\begin{pmatrix}-4&-3&3\\7&6&-4\\-1&-2&0\\-7&-8&4\end{pmatrix}$.

2.2.37 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. 2.2.38 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. 2.2.39 a) $\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&3&5&1\\3&-1&0&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-4&-8&-7\\1&4&6&4\\1&3&4&7\end{pmatrix}$.

2.2.40 a) 4, 0, neexistuje, b) 2, 1, $\left(\begin{pmatrix}8\\1\\7\end{pmatrix}\right)$, c) 2, 1, $((e_1+e_2-e_3))$, d) 3, 0, neexistuje.

2.2.41 a) $n-1$, 1, e_1, b) $+\infty$, 1, e_1. 2.2.42 n, 0, neexistuje. 2.2.43 $+\infty$, 0, neexistuje. 2.2.44 nemá řešení. 2.2.45 a) $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $h(A)=2$, $d(A)=2$, b) $\left(\begin{pmatrix}0\\3\\-3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\\-3\end{pmatrix}\right)$, c) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

2.2.46 a) $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, b) $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}1&-3\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\-1&-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 2.2.47 $-2e_1+[-e_1+e_2+e_3]_\lambda$.

2.2.48 $\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}\right\}$. 2.2.49 $\frac{1}{2}e_2+\frac{3}{4}e_3+[e_1]_\lambda$. 2.2.50 pro $\alpha\neq 3$ nemá řešení, pro $\alpha=3$ $\{3e_1-e_2\}$.

2.2.51 $\begin{pmatrix}68&58\\-89&-95\end{pmatrix}$. 2.2.52 $\begin{pmatrix}-81&-27\\-56&-19\end{pmatrix}$. 2.2.53 a) $\begin{pmatrix}0&3&6&3\\3&-6&-3&-2\\1&-3&2&0\\1&0&2&1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}2&1&3\\-3&-8&3\\1&3&3\end{pmatrix}$.

2.2.54 $\begin{pmatrix}1&-2&12&1\\0&-1&10&1\\-2&2&11&0\\3&-3&6&0\end{pmatrix}$. 2.2.55 $\begin{pmatrix}109&93\\34&29\end{pmatrix}$. 2.2.56 $\begin{pmatrix}-4&8\\-12&0\end{pmatrix}$, ano.

2.2.57 $\begin{pmatrix}3&-4\\-3&-1\\0&-2\\2&-2\end{pmatrix}$. 2.2.58 ${}^{\mathcal{E}_3}(BA)^{\mathcal{Z}}\begin{pmatrix}3&-4\\-3&-1\\0&-2\\2&-2\end{pmatrix}$. 2.2.59 $(72,-15,-15),\left(\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\24\\0\end{pmatrix}\right)$.

2.2.60 $\begin{pmatrix}6&13\\0&1\end{pmatrix}$. 2.2.61 a) 1, b) $\begin{pmatrix}-4&2\\0&0\\-2&1\end{pmatrix}$. 2.2.62+2.2.63 pro $\alpha\neq -3$ je $h(BA)=3$, pro $\alpha=-3$ $h(BA)=2$. 2.2.64 $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$. 2.2.65 $(-4e_1+e_2)$. 2.2.66 $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right)$.
2.2.67 3 pro $\alpha\neq 1$, 1 pro $\alpha=1$. 2.2.68 $2e_2+[e_1]_\lambda$. 2.2.71 $k=n$. 2.2.72 a) zamění se i-tý a j-tý sloupec, b) zamění se i-tý a j-tý řádek, c) i-tý sloupec se vynásobí α, d) i-tý řádek se vydělí α. 2.2.74 ne. 2.2.76 $m\cdot n$. 2.2.77 a) $n\cdot d(A)$, b) $n\cdot d(A)$. 2.2.78 n^2-nm. 2.2.88 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{P}),(Tx)(t)=t\cdot x(t), DT-TD=I$.

Kapitola 3

Soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta

3.1.1

Nechť hodnost matice homogenní soustavy lineárních rovnic je o jedničku menší než počet neznámých. Pak libovolná dvě řešení této soustavy mají tu vlastnost, že jedno z nich je násobkem druhého. Dokažte.

3.1.2

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Potom existuje nenulový polynom φ s koeficienty v tělese T takový, že $\varphi(\mathbb{A}) = \mathbb{O}$. Dokažte.

3.1.3

Budiž dána nehomogenní soustava lineárních rovnic (řešitelná) a lineární kombinace jejích řešení. Kdy je tato kombinace řešením této soustavy?

3.1.4

Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby řešením dané soustavy lineárních rovnic (řešitelné) byl:

a) součet jejích libovolných dvou řešení,

b) násobek libovolného jejího řešení pevně zvoleným číslem $\alpha \in T$, $\alpha \neq 1$.

3.1.5

Buďte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dvě řešení soustavy lineárních rovnic $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $(i \in \widehat{m})$, $\alpha \in T$. Najděte soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s týmiž koeficienty u neznámých jako má daná soustava tak, aby nová soustava lineárních rovnic měla řešení:

a) $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$,

b) $(\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n)$.

Kolik takových soustav existuje?

Nalezněte množinu všech řešení následujících homogenních soustav lineárních rovnic:

3.1.6

$$x - y + z + t = 0$$

3.1.7

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & & & - & 2t & = & 0 \\ -2x & - & 4y & + & 5z & - & 9t & = & 0 \\ 3x & + & y & & & + & t & = & 0 \end{array}$$

3.1.8

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & 2y & + & 5z & - & t & = & 0 \\ -2x & + & 5y & - & 2z & + & 4t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 3z & - & t & = & 0 \\ 5x & + & 4y & + & 7z & + & t & = & 0 \end{array}$$

3.1.9

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & + & 14y & & & + & 11t & = & 0 \\ 13x & + & 36y & - & 10z & + & 19t & = & 0 \\ 3x & + & 25y & - & 19z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & + & 5t & = & 0 \end{array}$$

3.1.10

$$\begin{aligned} -x + y + z + u + v &= 0 \\ x - y + z + u + v &= 0 \\ x + y - z + u + v &= 0 \\ x + y + z - u + v &= 0 \\ x + y + z + u - v &= 0 \end{aligned}$$

3.1.11

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 10y & + & 2z & = & 0 \\ 6x & + & 16y & + & 11z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

3.1.12

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - u &= 0 \\ -x + z - v &= 0 \\ -y + u - t &= 0 \\ -z + v &= 0 \\ -u + t &= 0 \end{aligned}$$

3.1.13

$$\begin{aligned} x - z + v &= 0 \\ y - u + t &= 0 \\ x - y + v - t &= 0 \\ y - z + t &= 0 \\ x - u + v &= 0 \end{aligned}$$

3.1.14

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & - & 3y & + & z & + & 6u & - & 2v & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & - & 2u & + & 2v & = & 0 \\ 5x & + & 6y & - & 2z & + & 7u & + & 4v & = & 0 \\ 9x & + & 12y & - & 4z & + & 9u & + & 8v & = & 0 \end{array}$$

Nalezněte množinu všech řešení následujících nehomogenních soustav lineárních rovnic:

3.1.15

$$x + y + z + u + v = 1$$

3.1.16

$$2x + y - z + t - 3u = 1,$$

3.1.17

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & - & 3u = 1 \\ -11x & + & 2y & & & - & t & + & 3u = -1 \end{array}$$

3.1.18

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \end{array}$$

3.1.19

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 2 \\ 5x & + & y & - & z & + & 2t & = & -1 \\ 2x & - & y & + & z & - & 3t & = & 4 \end{array}$$

3.1.20

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x &+& y &+& z &+& u &+& v &=& 7 \\ 3x &+& 2y &+& z &+& u &-& 3v &=& -2 \\ && y &+& 2z &+& 2u &+& 6v &=& 23 \\ 5x &+& 4y &+& 3z &+& 3u &-& v &=& 12 \end{array}$$

3.1.21

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& 2y &+& 3z &+& 4t &=& 11 \\ 2x &+& 3y &+& 4z &+& t &=& 12 \\ 3x &+& 4y &+& z &+& 2t &=& 13 \\ 4x &+& y &+& 2z &+& 3t &=& 14 \end{array}$$

3.1.22

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& 2y &+& 3z &-& t &=& 1 \\ 3x &+& 2y &+& z &-& t &=& 1 \\ 2x &+& 3y &+& z &+& t &=& 1 \\ 2x &+& 2y &+& 2z &-& t &=& 1 \\ 5x &+& 5y &+& 2z && &=& 2 \end{array}$$

3.1.23

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x &+& 7y &+& 3z &+& t &=& 6 \\ 3x &+& 5y &+& 2z &+& 2t &=& 4 \\ 9x &+& 4y &+& z &+& 7t &=& 2 \end{array}$$

3.1.24

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 8x &+& 6y &+& 5z &+& 2t &=& 21 \\ 3x &+& 3y &+& 2z &+& t &=& 10 \\ 4x &+& 2y &+& 3z &+& t &=& 8 \\ 3x &+& 5y &+& z &+& t &=& 15 \\ 7x &+& 4y &+& 5z &+& 2t &=& 18 \end{array}$$

3.1.25

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x &+& 3y &+& z &+& 2t &=& 4 \\ 4x &+& 3y &+& z &+& t &=& 5 \\ 5x &+& 11y &+& 8z &+& 2t &=& 2 \\ 2x &+& 5y &+& z &+& t &=& 1 \\ 1x &-& 7y &-& z &+& 2t &=& 7 \end{array}$$

3.1.26

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 45x &-& 28y &+& 34z &-& 52t &=& 9 \\ 36x &-& 23y &+& 29z &-& 43t &=& 3 \\ 35x &-& 21y &+& 28z &-& 45t &=& 16 \\ 47x &-& 32y &+& 36z &-& 48t &=& -17 \\ 27x &-& 19y &+& 22z &-& 35t &=& 6 \end{array}$$

3.1.27

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& \dots &+& x_n &=& 1 \\ x_1 &+& x_3 &+& x_4 &+& \dots &+& x_n &=& 2 \\ x_1 &+& x_2 &+& x_4 &+& \dots &+& x_n &=& 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& \dots &+& x_{n-1} &=& n \end{array}$$

3.1.28

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_2 &+& x_3 &+& x_4 &+& \dots &+& x_n &=& 1 \\ x_1 &+& x_3 &+& x_4 &+& \dots &+& x_n &=& 2 \\ x_1 &+& x_2 &+& x_4 &+& \dots &+& x_n &=& 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& \dots &+& x_{n-1} &=& n \end{array}$$

3.1.29

Zjistěte, pro které hodnoty parametru α mají následující soustavy lineárních rovnic netriviální řešení a určete dimenzi vektorového prostoru všech řešení daných soustav:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& \alpha y &+& z &+& \alpha u &=& 0 \\ \alpha x &+& y &+& \alpha z &+& u &=& 0 \\ x &-& 5y &+& 3z &+& 2u &=& 0 \\ 2x &-& 4y &+& 4z &+& 3u &=& 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \alpha x &+& y &+& 3z &+& 2u &=& 0 \\ x &+& y &+& \alpha z &+& \alpha u &=& 0 \\ 2x &+& 3y &+& 2z &+& 2u &=& 0 \\ \alpha x &+& y &+& 4z &+& 3u &=& 0 \end{array}$$

3.1.30

Zjistěte, jakou podmínku musí splňovat parametry α, β, aby následující soustava lineárních rovnic měla netriviální řešení a určete dimenzi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ \alpha x & + & \beta y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

3.1.31

Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro parametry α, β, γ tak, aby následující soustava lineárních rovnic měla netriviální řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & \beta y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \gamma z & = & 0 \end{array}$$

3.1.32

Jakou podmínku musí splňovat parametry $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$, aby v následující soustavě lineárních rovnic bylo možno neznámé z, u volit libovolně:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & y & + & \alpha z & + & \beta u & = & 0 \\ -x & + & & + & \gamma z & + & \delta u & = & 0 \\ \alpha x & + & \gamma y & & & - & \lambda u & = & 0 \\ \beta x & + & \delta y & + & \lambda z & & & = & 0 \end{array}$$

3.1.33

Nalezněte všechny hodnoty parametru λ tak, aby následující soustava lineárních rovnic byla řešitelná. Kolik neznámých je libovolně volitelných?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & \lambda \end{array}$$

3.1.34

Soustava rovnic $\begin{array}{rcrcrcl} \beta x & + & \alpha y & & & = & \gamma \\ \gamma x & & & + & \alpha z & = & \beta \\ & & \gamma y & + & \beta z & = & \alpha \end{array}$ má právě jedno řešení. Dokažte, že pak je $\alpha\beta\gamma \neq 0$ a nalezněte toto řešení.

Nalezněte množinu všech řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametru λ:

3.1.35

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \end{array}$$

3.1.36

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}$$

3.1.37

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x &+& y &+& z &=& 1 \\ x &+& \lambda y &+& z &=& \lambda \\ x &+& y &+& \lambda z &=& \lambda^3 \end{array}$$

3.1.38

$$\begin{array}{rcrcrcl} (1+\lambda)x &+& y &+& z &=& 1 \\ x &+& (1+\lambda)y &+& z &=& \lambda \\ x &+& y &+& (1+\lambda)z &=& \lambda^2 \end{array}$$

3.1.39

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda x &+& y &+& z &+& u &=& 1 \\ x &+& \lambda y &+& z &+& u &=& \lambda \\ x &+& y &+& \lambda z &+& u &=& \lambda^2 \\ x &+& y &+& z &+& \lambda u &=& \lambda^3 \end{array}$$

3.1.40

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda x &+& y &+& z &+& u &=& 1 \\ x &+& \lambda y &+& z &+& u &=& 1 \\ x &+& y &+& \lambda z &+& u &=& 1 \\ x &+& y &+& z &+& \lambda u &=& 1 \end{array}$$

3.1.41

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x &-& y &+& 3z &+& 4u &=& 5 \\ 4x &-& 2y &+& 5z &+& 6u &=& 7 \\ 6x &-& 3y &+& 7z &+& 8u &=& 9 \\ \lambda x &-& 4y &+& 9z &+& 10u &=& 11 \end{array}$$

3.1.42

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x &-& y &+& 3z &+& 4u &=& 5 \\ 4x &-& 2y &+& 5z &+& 6u &=& 7 \\ 6x &-& 3y &+& 7z &-& \lambda u &=& 9 \\ \lambda x &-& 4y &+& 9z &+& 10u &=& 11 \end{array}$$

3.1.43

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda x &+& y &+& z &+& u &=& 0 \\ x &+& \lambda y &+& z &+& u &=& 1 \\ (\lambda+1)x &+& y &+& \lambda z &+& u &=& \lambda \end{array}$$

3.1.44

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda x &+& y &+& z &+& u &=& 1 \\ x &+& \lambda y &+& z &+& u &=& \lambda \\ x &+& y &+& z &+& u &=& \lambda^2 \end{array}$$

3.1.45

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x &+& 2\lambda y &+& z &=& 1 \\ 2x &+& \lambda^2 y &+& (\lambda+1)z &=& \lambda \end{array}$$

3.1.46

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x &+& \lambda y &+& \lambda z &=& 1 \\ -x &+& \lambda^2 y &+& z &=& 1 \\ \lambda x &+& \lambda y &+& z &=& \lambda \\ \lambda x &+& \lambda y &+& (2\lambda-1)z &=& 2-\lambda \end{array}$$

3.1.47

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x &+& y &+& \lambda z &=& 1 \\ \lambda x &+& \lambda y &+& z &=& \lambda^2 \\ x &+& \lambda y &+& z &=& \lambda \end{array}$$

3.1.48

$$\begin{array}{rcrcrcl} (\lambda+1)x &+& y &+& z &=& \lambda^2+3\lambda \\ x &+& (\lambda+1)y &+& z &=& \lambda^3+3\lambda^2 \\ x &+& y &+& (\lambda+1)z &=& \lambda^4+3\lambda^3 \end{array}$$

3.1.49

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda x &+& (4\lambda-1)y &+& (\lambda^2+\lambda+1)z &+& (3\lambda+1)u &=& \lambda^3+\lambda \\ 2x &+& 6y &+& (2\lambda+1)z &+& 5u &=& 3\lambda^2 \\ (\lambda+1)x &+& (4\lambda+2)y &+& (\lambda+1)^2 z &+& (3\lambda+3)u &=& \lambda^3+\lambda^2+\lambda+3 \\ x &+& 3y &+& \lambda z &+& 2u &=& \lambda^2 \end{array}$$

3.1.50

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametru β:

$$\beta x \;-\; (\beta^2-1)y \;+\; 0z \;+\; u \;=\; \beta$$

3.1.51

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametru β:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \beta x & + & y & + & z & = & \beta \\ \beta x & + & \beta y & + & z & = & \beta \\ \beta x & + & \beta y & + & \beta z & = & \beta \end{array}$$

3.1.52

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech β, γ:

$$\beta x + \beta y + \gamma z = 1$$

3.1.53

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametru α:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha^2 y & & & = & \alpha^3 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ -x & + & y & - & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

3.1.54

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametru β:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 2\beta y & + & (2+\beta)z & - & u & = & 2 \\ \beta x & - & \beta^2 y & & & + & u & = & \beta \end{array}$$

3.1.55

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametru α:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -\alpha x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \\ \alpha^2 x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \\ -\alpha^3 x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha^2 \\ (\alpha^2-\alpha)x & + & 2y & + & 2z & = & \alpha+1 \end{array}$$

Nalezněte množinu všech řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametrech α, β:

3.1.56

$$\begin{array}{rcrcrcr} (\alpha+1)x & + & (\beta+1)y & + & (\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)z & = & \beta \\ (\beta+1)x & + & (\alpha+1)y & + & (\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)z & = & -\alpha \\ x & + & y & + & (\alpha+\beta)z & = & 0 \end{array}$$

3.1.57

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & \beta y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2\beta y & + & z & = & 4 \end{array}$$

3.1.58

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \\ \beta x & + & y & + & \alpha z & = & \beta \end{array}$$

3.1.59

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha x & + & \beta y & + & \alpha z & + & \beta u & = & \alpha \end{array}$$

3.1.60

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \beta z & = & \alpha \end{array}$$

3.1.61

$$\begin{array}{rcrcrcl} (2\alpha-1)x & - & y & & & = & 2\beta-3 \\ (\alpha+2)x & & & + & 2z & = & \beta \\ -x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

3.1.62

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha\beta z & = & \alpha \\ \beta x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^2\beta z & = & \alpha^2\beta \end{array}$$

3.1.63

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \beta y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha\beta y & + & z & = & \beta \\ x & + & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

3.1.64

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & & & + & \alpha z & = & 1 \\ \alpha^2 x & + & y & + & \alpha\beta z & = & -1 \\ \alpha\beta x & + & y & & z & = & \beta \end{array}$$

3.1.65

$$\begin{array}{rcrcrcr} \beta x & + & y & + & z & = & -1 \\ (2+2\beta)x & + & (\alpha+4)y & + & 3z & = & -2 \\ (2-2\beta)x & + & (\alpha-1)y & - & 2z & = & 5 \end{array}$$

3.1.66

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & \alpha \\ -\alpha\beta x & - & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$

3.1.67

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ \alpha\beta x & + & \beta y & - & \alpha z & = & -\alpha \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$

3.1.68

$$\begin{array}{rcrcrcll} \alpha x & + & \beta y & + & z & = & \alpha & \\ \beta x & + & y & + & 2z & = & 1 & (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \alpha x & + & y & + & z & = & \beta & \end{array}$$

3.1.69

$$\begin{array}{rcrcrcll} \alpha x & + & y & + & \alpha z & = & \beta & \\ \beta x & + & 2y & - & z & = & \alpha & (\beta \in \mathbb{R}) \\ \alpha x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1 & \end{array}$$

3.1.70

$$\begin{array}{rcrcrcll} (\alpha^2+\alpha)x & + & (\alpha^2-\alpha)y & + & \alpha z & = & \alpha\beta & \\ (\alpha+2\alpha\beta)x & + & (\alpha^2-2\alpha-1)y & + & \alpha z & = & \alpha\beta-\beta^2 & (\beta \in \mathbb{R}) \\ (\alpha^2-2\alpha\beta)x & + & (2\alpha+2\beta+1)y & & & = & \beta^2+\alpha\beta+2 & \end{array}$$

3.1.71

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech α, β, γ:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & y & - & 4z & = & \alpha+\beta \\ 4x & + & 6y & + & (\gamma-1)z & = & 9-\beta \\ 3x & + & 3y & + & (\gamma+4)z & = & 9-\alpha-\beta \end{array}$$

3.1.72

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \beta \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \gamma \end{array}$$

3.1.73

Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n \geq 2$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & \alpha_1 \\ x_2 & + & x_3 & = & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & + & x_n & = & \alpha_{n-1} \\ x_n & + & x_1 & = & \alpha_n \end{array}$$

3.1.74

Určete všechny vektory $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ tak, aby každý z nich byl násobkem nějakého řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 2y & + & 2z & = & \alpha \\ 2x & & & + & 2z & = & \beta \\ -x & + & y & + & z & = & \gamma \end{array}$$

Určete o jaké násobky jde.

3.1.75

Určete všechny vektory $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ takové, aby jejich k-násobek byl řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & - & 2y & + & 3z & + & 2u & = & \alpha \\ x & + & y & + & z & - & u & = & \beta \\ & & & & 2z & & & = & \gamma \\ x & - & y & & & + & u & = & \delta \end{array}$$

Jakých hodnot může k nabývat?

Výsledky

3.1.3 součet koeficientů kombinace musí být roven jedné. 3.1.4 a), b) homogenita soustavy. 3.1.5 a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 2b_i$, $i \in \widehat{m}$, b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \alpha b_i$, $i \in \widehat{m}$, právě jedna. 3.1.6 $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

3.1.7 $\left[\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.8 $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.9 $\left[\begin{pmatrix}11\\0\\1\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\13\\-14\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.10 $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

3.1.11 $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.12 $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.13 $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.14 $\left[\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

3.1.16 $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.17 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}3\\9\\0\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\11\\15\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

3.1.15 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.18 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

3.1.19 nemá řešení. 3.1.20 $\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.21 $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.22 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} +$ $\left[\begin{pmatrix}5\\-7\\5\\6\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.23 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\11\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.24 $\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\-5\\11\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.25 nemá řešení.

3.1.26 $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-4\\-3\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.27 $\left\{\begin{pmatrix}1+\dfrac{n(n-1)}{2}\\-1\\-2\\-3\\\vdots\\-(n-1)\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.28 $\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{n(n+1)}{2(n-1)}-1\\\vdots\\\dfrac{n(n+1)}{2(n-1)}-n\end{pmatrix}\right\}$. 3.1.29 a) pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$, $\dim S = 1$ pro $\alpha \neq 1$, $\dim S = 2$ pro $\alpha = 1$ b) pro žádné α. 3.1.30 $\alpha = \beta - 2, \dim S = 1$. 3.1.31 $\alpha\beta\gamma - (\alpha+\beta+\gamma) + 2 = 0$. 3.1.32 $\lambda = \alpha\delta - \beta\gamma$. 3.1.33 $\lambda = 5$, dvě. 3.1.34 $x = \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$, $y = \dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$, $z = \dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$. 3.1.35 $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 2:$ $\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda+2}\\\dfrac{1}{\lambda+2}\\\dfrac{1}{\lambda+2}\end{pmatrix}\right\}$, $\lambda = 1: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\lambda = -2$: nemá řešení. 3.1.36 $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq$

$-2: \left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ \dfrac{1}{\lambda+2} \\ \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{pmatrix} \right\}$, $\lambda = 1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $\lambda = -2$: nemá řešení. 3.1.37 $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -2: \left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2} \\ \dfrac{1-\lambda^2}{\lambda+2} \\ \dfrac{\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2} \end{pmatrix} \right\}$, $\lambda = 1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $\lambda = -2$: nemá řešení. 3.1.38 $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq -3$: $\left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)} \\ \dfrac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \\ \dfrac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \end{pmatrix} \right\}$, $\lambda = 0 \vee \lambda = -3$: nemá řešení. 3.1.39 $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -3$: $\left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+3} \\ -\dfrac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda+3} \\ \dfrac{2\lambda+1}{\lambda+3} \\ \dfrac{\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+3} \end{pmatrix} \right\}$, $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $\lambda = -3$: nemá řešení. 3.1.40 $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -3$: $\left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda+3} \\ \dfrac{1}{\lambda+3} \\ \dfrac{1}{\lambda+3} \\ \dfrac{1}{\lambda+3} \end{pmatrix} \right\}$, $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $\lambda = -3$: nemá řešení. 3.1.41 $\lambda \neq 8$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $\lambda = 8$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. 3.1.42 $\lambda \neq \pm 8$: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\lambda = -8$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $\lambda = 8$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. 3.1.43 $\lambda \neq 0$: $\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{\lambda} \\ 1 \\ \dfrac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda^2+\lambda \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $\lambda = 0$: nemá řešení. 3.1.44 $\lambda \neq 1$: $\begin{pmatrix} -1-\lambda \\ -\lambda \\ 0 \\ (1+\lambda)^2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.45 $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq -2$: $\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\lambda^2+2\lambda}\\ \frac{\lambda}{\lambda+2}\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}\lambda\\1-\lambda\\ \lambda^2-2\lambda\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\lambda = 0$: $\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\0\\1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\lambda = -2$: nemá řešení. 3.1.46 $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq \pm i$: $\left\{\begin{pmatrix}\frac{\lambda^2+\lambda-2}{\lambda^2+1}\\ \frac{3\lambda+1}{\lambda^3+\lambda}\\ -1\end{pmatrix}\right\}$, $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\lambda = 0 \vee \lambda = i \vee \lambda - i$: nemá řešení. 3.1.47 $\lambda \neq \pm 1$: $\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\1\\-\lambda\end{pmatrix}\right\}$, $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.48 $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq -3$: $\left\{\begin{pmatrix}2-\lambda^2\\2\lambda-1\\ \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1\end{pmatrix}\right\}$, $\lambda = -3$: $[111]_\lambda$, $\lambda = 0$: $\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.49 nemá řešení pro žádné λ. 3.1.50 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \beta\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \beta^2-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.51 $\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1$: právě jedno řešení $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\beta = 1$: $\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\beta = 0$: $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.52 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ nemá řešení, $\alpha \neq 0$: $\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-\gamma\\0\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\beta \neq 0$: $\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\beta}\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\-\gamma\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\-\alpha\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\gamma \neq 0$: $\begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{1}{\gamma}\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \gamma\\-\beta\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.53 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$: $\left\{\begin{pmatrix}\alpha^2-1\\1\\1-\alpha\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = 0$: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = -1$: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.54 $\beta \neq -2$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\beta = -2$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 3.1.55 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -1$: $\left\{\begin{pmatrix}\frac{\alpha-1}{\alpha^2+\alpha}\\ 2\alpha\\ \frac{-2\alpha}{\alpha+1}\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = 1$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.56 $\alpha \neq \beta$: $\left\{\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\\0\\ \frac{1}{\beta-\alpha}\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = \beta = 0$:

$\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = \beta \neq 0$: nemá řešení. 3.1.57 $\alpha \neq 1 \wedge \beta \neq 0$: $\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{1-2\beta}{\beta(1-\alpha)}\\ \dfrac{1}{\beta}\\ \dfrac{4\beta-1-2\alpha\beta}{\beta(1-\alpha)}\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = 1 \wedge \beta = \dfrac{1}{2}$: $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.58 $\beta \neq \alpha^2$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}\alpha^2-1\\ \beta-\alpha^2\\ \alpha-\alpha\beta\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = \beta = 1$: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = -1 \wedge \beta = 1$: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, v ostatních případech nemá řešení.

3.1.59 $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-\beta\\0\\0\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$: $\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ \alpha\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = \beta = 0$: $\mathbb{R}^4$. 3.1.60 $\alpha \neq -1 \wedge \beta \neq \alpha$: $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = \beta$: $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = -1$: $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-\beta-1\\ \beta-1\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.61 $\alpha \neq 0$: $\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{\beta-2}{\alpha}\\ \dfrac{2-\alpha-\beta}{\alpha}\\ \dfrac{\alpha-\beta+2}{\alpha}\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = 0 \wedge \beta = 2$: $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 2$: nemá řešení. 3.1.62 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \beta$: $\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha^2(\beta-1)}{\beta-\alpha}\\ \dfrac{\beta(\alpha^2-1)}{\alpha(\alpha-\beta)}\\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha(\beta-\alpha)}\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = \beta = 1$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.63 $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -2 \wedge \beta \neq 0$: $\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)}\\ \dfrac{\alpha\beta+\beta-2}{\beta(\alpha-1)(\alpha+2)}\\ \dfrac{\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)}\end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = \beta = -2$: $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\alpha = \beta = 1$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.64 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2\beta$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{2\beta+1}{\alpha(2\beta-\alpha)} \\ \dfrac{\alpha\beta+\beta}{\alpha-2\beta} \\ \dfrac{\alpha+1}{\alpha(\alpha-2\beta)} \end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = -1 \wedge \beta = -\dfrac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.65 $\alpha \neq -1 \wedge \beta \neq 0$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\beta} \\ \dfrac{3\beta-4}{\beta(\alpha+1)} \\ \dfrac{4-6\beta-3\alpha\beta}{\beta(\alpha+1)} \end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = -1 \wedge \beta = \dfrac{4}{3}$: $\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.66 $\alpha \neq \dfrac{3}{2} \wedge \alpha \neq -\beta$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha^2-\alpha\beta-3}{(\alpha+\beta)(2\alpha-3)} \\ \dfrac{\alpha^2\beta-3\alpha^2+\alpha+3}{(\alpha+\beta)(2\alpha-3)} \\ \dfrac{1+\alpha\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = \dfrac{3}{2} \wedge \beta = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.67 $\alpha \neq \dfrac{3}{2} \wedge \alpha \neq -\beta$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3-2\alpha} \\ \dfrac{\alpha}{2\alpha-3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = -\beta$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 3+\alpha \\ 2\alpha-3 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.68 $\beta \neq 1 \wedge \beta \neq 2\alpha$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{1-\alpha-2\beta+2\beta^2}{(1-\beta)(\beta-2\alpha)} \\ \dfrac{\beta-\alpha}{1-\beta} \\ \dfrac{\beta^3+\alpha^2+\alpha-3\alpha\beta}{(1-\beta)(2\alpha-\beta)} \end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = 1 \wedge \beta = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.69 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -\dfrac{1}{2}$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{1-\alpha\beta}{\alpha-\alpha^2} \\ \dfrac{\alpha^3-\alpha^2-\alpha-3\alpha\beta^2+1}{(\alpha-1)(2\alpha+1)} \\ \dfrac{\beta+\alpha^3-\alpha^2-2\alpha-\alpha\beta^2+2\alpha\beta}{(\alpha-\alpha^2)(2\alpha+1)} \end{pmatrix}\right\}$, $\alpha = 1 \wedge \beta = 1$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.70 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2\beta \wedge \alpha \neq -2\beta$: jediné řešení, $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, $\alpha = -2 \wedge \beta = -1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, $\alpha = -2 \wedge \beta = 1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 25 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, $\alpha = 2 \wedge \beta = -1$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.71 $\gamma \neq -9$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma(4\alpha+3\beta)+2\alpha+10\beta+153}{17(\gamma+9)} \\ \dfrac{\gamma(3\alpha-2\beta)-7\alpha-35\beta+153}{17(\gamma+9)} \\ \dfrac{9-2\alpha-\beta}{\gamma+9} \end{pmatrix}\right\}$, $\gamma = -9 \wedge 2\alpha+\beta = 9$: $\begin{pmatrix} \dfrac{6\alpha+5\beta+9}{34} \\ \dfrac{-4\alpha+9\beta+45}{34} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\gamma = -9 \wedge 2\alpha+\beta \neq 9$: nemá řešení. 3.1.72 $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -2$: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\lambda+\alpha-\beta-\gamma}{(\lambda+2)(\lambda-1)} \\ \dfrac{\beta\lambda+\beta-\alpha-\gamma}{(\lambda+2)(\lambda-1)} \\ \dfrac{\gamma\lambda+\gamma-\alpha-\beta}{(\lambda+2)(\lambda-1)} \end{pmatrix}\right\}$, $\lambda \neq -2 \wedge \alpha+\beta+\gamma = 0$: $\begin{pmatrix} \dfrac{\beta-\alpha}{3} \\ 0 \\ \dfrac{2\beta+\alpha}{3} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\lambda = 1 \wedge \alpha = \beta = \gamma$: $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, v ostatních případech nemá řešení. 3.1.73 pro n liché: $\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_n-\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}-\ldots-\alpha_2+\alpha_1}{2} \\ \dfrac{\alpha_1-\alpha_n+\alpha_{n-1}-\ldots-\alpha_3+\alpha_2}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}+\ldots-\alpha_1+\alpha_n}{2} \end{pmatrix}\right\}$, pro n sudé: je-li $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1} \neq \alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_n$, nemá řešení, v opačném případě: $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2-\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}+\ldots-\alpha_2+\alpha_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

3.1.74 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – libovolný násobek, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ – jednonásobek řešení, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ – dvojnásobek řešení. 3.1.75 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-k$ libovolné, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ – $k = \dfrac{1}{2}$ libovolné.

Kapitola 4

Lineární variety

4.1.1

Nalezněte parametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^2$, je-li:

a) $W \equiv 2x - 3y = -4$,

b) $W \equiv y = 2$,

c) $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

d) $W = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\alpha$.

4.1.2

Nalezněte parametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^3$, je-li:

a) $W \equiv 2x - 3y = -4$,

b) $W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2 \end{array}$,

c) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\alpha$,

d) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\alpha$.

4.1.3

Nalezněte parametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^4$, je-li:

a) $W \equiv 2x - 3y = -4$,

b) $W \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & u & = & 1 \\ 2x & & & & & + & u & = & 2 \\ & & & & z & - & u & = & 0 \end{array}$,

c) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\alpha$,

d) $W = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^4 | \varphi_1(\vec{a}) = 2 \wedge \varphi_2(\vec{a}) = -1 \right\}$, kde $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^4)^\#$,

$$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ je báze } \mathbb{R}^4.$$

4.1.4

Nalezněte neparametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^2$, je-li:

a) $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

b) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

c) $W \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & 3t \\ y & = & 1 & + & 2t \end{array}$,

d) $W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & t \end{array}$,

e) $W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{array}$.

4.1.5

Nalezněte neparametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^3$, je-li:

a) $W \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & t \\ y & = & 2 & + & 3t \\ z & = & & & 2t \end{array}$,

b) $W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & 3t & - & r \\ y & = & & & t & + & r \\ z & = & 3 & & & - & r \end{array}$,

c) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

d) $W = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\alpha$.

4.1.6

Nalezněte neparametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^4$, je-li:

a) $W \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & r \\ y & = & 2 & - & 3r \\ z & = & -1 & + & 2r \\ u & = & 1 & & \end{array}$,

b) $W \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & = & -2 & + & 3r & - & 4s & - & 3t \\ y & = & 3 & & & + & s & + & t \\ z & = & 1 & + & 5r & + & 2s & + & t \\ u & = & -1 & + & 2r & + & 3s & + & 2t \end{array}$.

c) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

d) $W = \left\{\vec{a} \in \mathbb{R}^4 | \varphi_1(\vec{a}) = 2 \wedge \varphi_2(\vec{a}) = -1\right\}$, kde $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^4)^\#$,

$$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

4.1.7

Nechť $W \subset \mathbb{R}^4$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\alpha$. Nechť $\varphi_i(\vec{a}) = \alpha_i, i \in \widehat{l}$, jsou vektorové rovnice variety W ($\varphi_i \in (\mathbb{R}^4)^\#, \alpha_i \in \mathbb{R}$).

a) Čemu je rovno l?

b) Určete $(\varphi_i)_{\mathcal{X}^\#}, i \in \widehat{l}$, je-li $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ báze $\mathbb{R}^4$.

4.1.8

Zjistěte, zda následující soubor vektorů z prostoru $\mathbb{R}^3$ je afinně závislý či nezávislý:

a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,

b) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$,

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$,

d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,

e) $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

4.1.9

Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby následující soubor vektorů z prostoru $\mathbb{C}^4$ byl afinně nezávislý:

a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$,

b) $\left(\begin{pmatrix} \alpha + 2 \\ 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 \\ -1 \\ \alpha + 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 \\ -7 \\ -3\alpha^2 + 4\alpha + 2 \\ -\alpha - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

c) $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \alpha + 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ \alpha - 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

d) $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -i \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 - i \\ 2 - \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\alpha \\ 2 - 3i \\ 4 - 2i - 3\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha + 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right)$.

4.1.10

Zjistěte, zda vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, leží:

a) na jedné přímce, b) v jedné rovině.

4.1.11

Dokažte, že:

a) Každý jednočlenný soubor vektorů je afinně nezávislý.

b) Dvojčlenný soubor vektorů je afinně závislý, právě když vektory tvořící tento soubor jsou stejné.

4.1.12

Každý lineárně nezávislý soubor vektorů je afinně nezávislý. Dokažte. Platí též obrácená implikace? Uveďte vhodné příklady.

4.1.13

Nalezněte průnik lineárních variet $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$ (parametrické i neparametrické rovnice – existují-li), je-li:

a) $W_1 \equiv x + 2y = 1$, $\quad W_2 \equiv 2x - y = 2$,

b) $W_1 \equiv 2x - 3y = -1$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 3t \\ y & = & & & 2t \end{array}$,

c) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & - & t \\ y & = & 6 & + & 2t \end{array}$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & & & t \\ y & = & 3 & - & t \end{array}$.

4.1.14

Nalezněte průnik lineárních variet $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ (parametrické i neparametrické rovnice – existují-li), je-li:

a) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3t \\ y & = & & & 2t \\ z & = & & & r \end{array}$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & 7t \\ y & = & -2 & - & 3t \\ z & = & 2 & + & 5t \end{array}$,

b) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\alpha$, $\quad W_2 \equiv x - 3y - 4z = -11$,

c) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2 \end{array}$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}$,

d) $W_1 = \left\{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(\vec{a}) = -1\right\}$, kde $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ je báze $\mathbb{R}^3$,

$$W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & + & 3s \\ y & = & -1 & + & 3t & - & 3s \\ z & = & 1 & + & 2t & + & 2s \end{array}.$$

4.1.15

Nalezněte průnik lineárních variet $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ (parametrické i neparametrické rovnice – existují-li), je-li:

a) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

b) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & r & + & s \\ y & = & 1 & - & r & + & 2s \\ z & = & & & 2r & - & s \\ u & = & 2 & - & r & - & s \end{array}$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

c) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & u & = & 2 \\ x & & & & & & & = & 0 \end{array}$,

d) $W_1 = \left\{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 | \varphi_1(\vec{a}) = -1 \wedge \varphi_2(\vec{a}) = 2\right\}$, kde $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^4)^\#$,

$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ báze $\mathbb{R}^4$,

$$W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & = & 1 & + & t & + & r & + & s \\ y & = & & & 2t & - & r & & \\ z & = & 1 & - & t & & & & \\ u & = & & & t & + & 2r & & \end{array}.$$

4.1.16

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^5$, $W_1 = \vec{a} + [\vec{b}]_\lambda$, $W_2 = \vec{c} + [\vec{d}]_\lambda$. Nalezněte $W_1 \cap W_2$, je-li:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.1.17

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice $W_1 + W_2$, je-li:

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right]_\alpha, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}.$$

4.1.18

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte neparametrické rovnice $W_1 + 2W_2$, je-li:

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -1 & + & t & + & 2r \\ y & = & 2 & + & t & & \\ z & = & 1 & + & t & + & 3r \\ u & = & & & t & & \end{array}, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\4\end{pmatrix}\right]_\alpha.$$

4.1.19

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte parametrické a neparametrické rovnice variety $W_1 + W_2$, je-li:

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\alpha, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & u & = & 2 \\ x & & & & & & & = & 0 \end{array}.$$

4.1.20

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, Nalezněte parametrické a neparametrické rovnice variety $2W_1 - 3W_2$, je-li:

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\5\\2\end{pmatrix}\right]_\alpha, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & & & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & + & u & = & 0 \\ x & + & 2y & & & + & u & = & 2 \end{array}.$$

4.1.21

Vyšetřete vzájemnou polohu variet $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, je-li:

a) $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 2t \\ y & = & -3 & - & t \\ z & = & -2 & + & 5t \end{array}, \quad W_2 \equiv 4x + 3y - z = -3,$$

b) $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & + & t \\ y & = & 7 & - & 8t \\ z & = & -11 & + & 3t \end{array}, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right]_\alpha,$$

c) $$W_1 = \left[\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right]_\alpha, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & + & 2t \\ y & = & 7 & - & t \\ z & = & 6 & - & 2t \end{array},$$

d) $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -2 \\ & & 4y & - & z & = & 11 \end{array}, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array},$$

e) $W_1 = \left\{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(\vec{a}) = 2\right\}$, kde $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^{\#}$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

je báze $\mathbb{R}^3$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha$.

4.1.22

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$. Zjistěte, pro která α jsou W_1 a W_2 rovnoběžné, je-li:

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & & & + & s \\ y & = & 11 & + & \alpha r & + & 2s \\ z & = & -2 & + & 5t & & \end{array}, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & 11 \\ y & - & 3z & = & -2 \end{array}.$$

4.1.23

Vyšetřete vzájemnou polohu variet $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, je-li:

a) $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 2z & - & u & = & -2 \\ 2x & & & + & z & & & = & 0 \end{array}, \; W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha,$$

b) $$W_1 \equiv x - 2y + 3z - 2u = 3, \; W_2 = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha,$$

c) $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} -2x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & - & y & & & & & = & 0 \\ & & y & & & + & u & = & 2 \end{array}, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -1 & & & + & s \\ y & = & & & r & & \\ z & = & 2 & + & r & - & s \\ u & = & & - & r & - & 2s \end{array}.$$

4.1.24

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. Zjistěte, pro které hodnoty parametru α jsou variety W_1, W_2 a) rovnoběžné, b) různoběžné, je-li:

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & - & z & = & 2 \end{array}.$$

4.1.25

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. Zjistěte, pro které hodnoty parametru β jsou variety W_1, W_2 a) rovnoběžné, b) různoběžné, je-li:

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & u & = & 2 \end{array}, \; W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$$

4.1.26

Zjistěte, jsou-li body $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ z prostoru $\mathbb{R}^2$ vrcholy rovnoběžníka.

4.1.27

Dokažte, že body $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ z prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou vrcholy lichoběžníka. Které strany jsou jeho základnami?

4.1.28

Nechť $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nalezněte neparametrické rovnice přímky v $\mathbb{R}^2$, která prochází bodem $\vec{a}$ a je rovnoběžná s přímkou procházející body $\vec{b}$, $\vec{c}$.

4.1.29

Nechť $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nalezněte neparametrické rovnice přímky v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\vec{a}$ a je rovnoběžná s přímkou procházející body $\vec{b}$, $\vec{c}$.

4.1.30

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice roviny $W \subset \mathbb{R}^3$ takové, že $W_1 \subset W$ a $W_2 \subset W$, je-li:

a) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & 5t \\ y & = & -1 & + & 2t \\ z & = & 2 & + & 4t \end{array}$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 8 & + & 3t \\ y & = & 1 & + & t \\ z & = & 6 & - & 2t \end{array}$,

b) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 8x & - & 7y & - & 7z & = & 7 \\ 5x & & & - & 7z & = & 0 \end{array}$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & - & 3z & = & -15 \\ & & 5y & - & 3z & = & 3 \end{array}$.

4.1.31

Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice přímky v prostoru $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\vec{a}$, protíná W_1 a je rovnoběžná s W_2, je-li:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & -1 & - & 3t \\ z & = & 2 & + & 2t \end{array}$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & - & 3t & + & r \\ y & = & 1 & + & 2t & - & r \\ z & = & -1 & + & t & - & 2r \end{array}$,

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 3t \\ y & = & -2 & - & t \\ z & = & 2 & + & 2t \end{array}$, $\quad W_2 \equiv 14x + 5y - z = 40$,

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha$.

4.1.32

Nechť $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^3$, $W_1 \equiv x - y + z = 0$, $W_2 \equiv 3x - y - z = -2$, $W_3 \equiv 4x - y - 2z = \alpha$. Určete parametr α tak, aby $W_1 \cap W_2 \cap W_3$ byla přímka v prostoru $\mathbb{R}^3$.

4.1.33

Nechť $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, $W \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W \equiv \alpha x - y = 1 - \alpha$. Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby W protla úsečku s krajními body $\vec{a}, \vec{b}$.

4.1.34

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, $W_1 \equiv \alpha x + 2\beta y = \gamma - 1$, $W_2 \equiv (1-\alpha)x + (1-2\beta)y = -\gamma$. Nalezněte nutné a postačující podmínky pro parametry α, β, γ tak, aby

a) $W_1 = W_2$,

b) W_1, W_2 byly rovnoběžné disjunktní,

c) W_1, W_2 byly různoběžné.

4.1.35

Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice všech rovin v prostoru $\mathbb{R}^3$, které procházejí bodem $\vec{a}$ a jsou rovnoběžné s W_1 i W_2, je-li:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & & & = & 0 \\ 3x & & & - & z & = & 1 \end{array}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & & & t \\ y & = & -1 & + & 2t \\ z & = & 1 & + & t \end{array}$.

4.1.36

Nechť $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$, které leží ve W_1 a protínají W_2 i W_3, je-li:

$W_1 \equiv 3x + 4y + z = 2$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 2t \\ y & = & & - & t \\ z & = & 4 & - & 2t \end{array}$, $W_3 \equiv \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & z & = & 3 \end{array}$.

4.1.37

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, $W_1 = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(\vec{a}) = 1 \right\}$, kde $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & r & + & s \\ y & = & -1 & + & 2r & - & s \\ z & = & & & & - & s \end{array}$.

Nalezněte parametrické i neparametrické rovnice přímky v prostoru $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a je rovnoběžná s $W_1 \cap W_2$.

4.1.38

Nechť $W_1, W_2, W_3, W_4 \subset \mathbb{R}^3$, $W_1 = \left\{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(\vec{a}) = 1\right\}$, $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$, $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & r & + & s \\ y & = & -1 & + & 2r & - & s \\ z & = & & & & - & s \end{array}, \; W_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\alpha,$$

$$W_4 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & -4 \end{array}.$$

Nalezněte parametrické rovnice přímky v prostoru $\mathbb{R}^3$, která prochází $W_3 \cap W_4$ a je rovnoběžná s $W_1 \cap W_2$.

4.1.39

Nalezněte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$, při kterých je množina všech řešení následující soustavy lineárních rovnic přímkou:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \alpha x & + & y & - & z & + & \alpha u & = & 0 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & & & = & 1 \\ (\alpha+1)x & + & y & + & \alpha z & - & \alpha^2 u & = & \alpha \end{array}.$$

4.1.40

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $W \subset \mathbb{R}^3$, ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $W \equiv 4x - z = 3$. Nalezněte neparametrické rovnice variety $A(W)$.

4.1.41

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ je báze prostoru $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ báze prostoru $\mathcal{P}_3$, $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = 1$, $y_3(t) = t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $W_1, W_2 \subset \mathcal{P}_2$, $W_1 = a + [z_1]_\lambda$, $W_2 = b + [z_2]_\lambda$, $a(t) = t$, $z_1(t) = 1 - 3t$, $b(t) = 1 - t$, $z_2(t) = 2 - 6t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte bázi zaměření variety $A(W_1 + W_2)$.

4.1.42

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, $W \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice variety $A(W)$, je-li:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -11 & -13 & -5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 13 & 17 & 7 \end{pmatrix}, \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$W \equiv x - 2y - z = 1$.

4.1.43

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $W \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte $A^{-1}(W)$ (parametrické a neparamatrické rovnice – existují-li), je-li:

a) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

b) $W \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 2t \\ y & = & 1 & + & t \\ z & = & & & 2t \end{array}$,

c) $W \equiv 2x - 2y - z = 1$,

d) $W = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\alpha$.

4.1.44

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$, $W \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte parametrické i neparametrické rovnice $A^{-1}(W)$, je-li:

$${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

4.1.45

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$, $W \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte neparametrické rovnice $A^{-1}(W)$, je-li:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & + & r & + & 3s \\ y & = & -4 & + & r & - & 4s \\ z & = & -7 & + & r & - & 4s \\ u & = & 2 & + & r & + & s \end{array}.$$

4.1.46

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, $W \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte neparametrické rovnice $A^{-1}(W)$, je-li:

$${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right]_\alpha.$$

4.1.47

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice příčky variet W_1, W_2, které procházejí bodem $\vec{a}$, je-li:

a) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 2t \\ y & = & -3 & + & 4t \\ z & = & 5 & + & 3t \end{array}$, $\quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 5y & - & 5z & = & 15 \\ 3x & + & 5y & - & 5z & = & 35 \end{array}$, $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ -25 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -10 \\ 19 \\ 17 \end{pmatrix}$.

4.1.48

Nechť $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice příčky variet W_1, W_2, která je rovnoběžná s W_3, je-li:

a) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & t \\ y & = & 3 & - & t \\ z & = & 4 & & \end{array}, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 3, \end{array}, \quad W_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\alpha,$

b) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & - & 3t \\ z & = & & - & 2t \end{array}, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & t \\ y & = & 1 & + & 2t \\ z & = & 3 & - & 2t \end{array}, \quad W_3 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 5z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 4 \end{array},$

c) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right]_\alpha, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array}, \quad W_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$

4.1.49

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & 2 \end{array}, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$

Nalezněte parametrické rovnice příčky variet W_1, W_2, která je podprostorem $\mathbb{R}^3$.

4.1.50

Nechť $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice příčky variet W_1, W_2, která leží ve W_3, je-li:

$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & & & 2t \\ z & = & 3 & - & t \end{array}, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & + & 3t \\ y & = & -2 & + & 2t \\ z & = & 1 & + & t \end{array},$

a) $W_3 \equiv 2x - y - 3z = 2$, b) $W_3 \equiv 3x - y + z = -1$.

4.1.51

Nechť $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte parametrické rovnice příčky variet W_1, W_2, která je prochází bodem $\vec{a}$ a určete průsečíky této příčky s W_1 a W_2, je-li:

a) $W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -11 \\ -15 \end{pmatrix},$

b) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 1 & + & 2t \\ z & = & 1 & + & t \\ u & = & 1 & & \end{array}, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\alpha, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

4.1.52

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte parametrické rovnice příčky variet W_1, W_2, která je podprostorem prostoru $\mathbb{R}^4$, je-li: $W_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

4.1.53

Nechť $W_1 \subset V$ je přímka, $W_2 \subset V$ lineární varieta. Nechť $W_1 \cap W_2$ je alespoň dvouprvková množina. Potom $W_1 \subset W_2$. Dokažte.

4.1.54

a) Nechť $W_1, W_2 \subset V$ jsou dvě přímky. Potom existuje lineární varieta $W \subset V$, $\dim W \leq 3$ taková, že $W_1 \subset W$ i $W_2 \subset W$. Dokažte.

b) Zobecněte a) na případ dvou variet od dimenzích k a l.

4.1.55

Nechť $W_1, W_2 \in V_n$ jsou lineární variety, $\dim W_1 = k$, $\dim W_2 = l$, $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, $k + l > n$. Potom $\dim\,(W_1 \cap W_2) \geq k + l - n$. Dokažte.

4.1.56

Nechť W je nadrovina ve vektorovém prostoru V. Potom v prostoru V neexistuje lineární varieta, která je s W mimoběžná. Dokažte.

4.1.57

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $P \subset\subset V$, nechť existuje codim P. Označme $\tilde{P}$ množinu všech lineárních variet v prostoru V, které mají P za své zaměření. Je-li $W_1, W_2 \in \tilde{P}$, $W_1 = \vec{a} + P$, $W_2 = \vec{b} + P$, $\alpha \in T$, definujeme $W_1 \boxplus W_2 = \vec{a} + \vec{b} + P$, $\alpha \boxdot W_1 = \alpha\vec{a} + P$.

a) Dokažte, že $\tilde{P}$ je s operacemi $\boxplus$ a $\boxdot$ vektorový prostor nad tělesem T,

b) Určete $\dim \tilde{P}$.

4.1.58

Nechť W_1, W_2 jsou mimoběžné přímky v prostoru $\mathbb{R}^3$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \notin W_1$, $\vec{a} \notin W_2$. Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby existovala právě jedna příčka přímek W_1 a W_2 procházející bodem $\vec{a}$. Vyšetřete i ostatní možné případy.

4.1.59

Nechť W_1, W_2 jsou mimoběžné přímky v prostoru $\mathbb{R}^3$, W přímka v $\mathbb{R}^3$. Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby existovala právě jedna příčka přímek W_1 a W_2 rovnoběžná s W. Vyšetřete i ostatní možné případy.

Výsledky

4.1.1 a) $x=-2+3t,\ y=2t$, b) $x=t,\ y=2$, c) $x=1+3t,\ y=1+4t$, d) $x=2+3t,\ y=1-2t$. 4.1.2 a) $x=-2+3t,\ y=2t,\ z=r$, b) $x=3+7t,\ y=-2-3t,\ z=2+5t$, c) $x=1+t-r,\ y=-1+4t+2r,\ z=t+2r$, d) $x=1+t,\ y=2+t,\ z=3$. 4.1.3 a) $x=-2+3r,\ y=2r,\ z=s,\ u=t$, b) $x=-t,\ y=1+t,\ z=2+2t,\ u=2+2t$, c) $x=2+r-2t,\ y=r+2t,\ z=-3r-t,\ u=1-3r-4t$, d) $x=4+t-2r,\ y=-1,\ z=t,\ u=r$. 4.1.4 a) $x-2y=3$, b) $x-y=-2$, c) $2x+3y=9$, d) $x=1$, e) $x=1, y=2$. 4.1.5 a) $2x+z=2,\ 3x+y=5$, b) $x-3y-4z=-11$, c) $x=1,\ y=2,\ z=3$, d) $y-z=-1$. 4.1.6 a) $3x+y=5,\ 2x-z=3,\ u=1$, b) $3x-2y-5z+8u=-25$, c) $5x+7y+4z=10,\ x+5y+2u=4$, d) $x-z+2u=4,\ y=-1$. 4.1.7 a) 1, b) např. $\begin{pmatrix}9\\6\\-4\\-1\end{pmatrix}$. 4.1.8 a) AN, b) AN, c) AN, d) AZ, e) AN. 4.1.9 a) $\alpha\in\mathbb{C}$, b) neexistuje, c) $\alpha\neq 41$, d) $\alpha\neq-2\wedge\alpha\neq i$. 4.1.10 a) ne, b) ne. 4.1.12 ne. 4.1.13 a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $x+2y=1,\ 2x-y=2$, b) $\emptyset$, c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $2x+y=4,\ x+y=3$. 4.1.14 a) $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{43}{23}\\ \frac{2}{23}\\ -\frac{34}{23}\end{pmatrix}\right\}$, $2x-3y=-4,\ x-y-2z=1,\ 2x+3y-z=-2$ b) $x=2t,\ y=1+2t,\ z=2-t$, $x-3y-4z=-11,\ 2x-y+2z=3$, c) $\emptyset$, d) W_1, $x=1+t+3s,\ y=-1+3t-3s,\ z=1+2t+2s$, $3x+y-3z=-1$. 4.1.15 a) $x=-1+t,\ y=1-t,\ z=1,\ u=t$, $x-u=-1,\ y+u=1,\ z=1$, b) $x=-1+3t,\ y=1+2t,\ z=-2+t,\ u=4-3t$, $x-3z=5,\ y-2z=5,\ 3z+u=-2$, c) $x=0,\ y=t,\ z=1+t,\ u=3t$, $x=0,\ y-z=-1,\ 3y-u=0$, d) $x=-5t,\ y=1+5t,\ z=1-t,\ u=-2-5t$, $x-5z=-5,\ y+5z=6,\ u-5z=-7$. 4.1.16 a) $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$. 4.1.17 $x+y=3$. 4.1.18 $3x+y-2z-2u=-9$. 4.1.19 $x=t,\ y=2+r-2s+t,\ z=1+s+t,\ u=r-2t$, $5x-y-2z+u=-4$. 4.1.20 $x=-1+2t,\ y=-2-2t,\ z=1+3t,\ u=-3+2t$, $x+y=-3,\ 3x-2z=-5,\ x-u=2$. 4.1.21 a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) mimoběžné, d) různoběžné, e) rovnoběžné. 4.1.22 $\alpha\neq-5$. 4.1.23 a) různoběžné, b) rovnoběžné, c) mimoběžné. 4.1.24 a) neexistuje, b) neexistuje. 4.1.25 a) -1, b) neexistuje. 4.1.26 ano. 4.1.27 ab, cd. 4.1.28 $2x-y=-6$. 4.1.29 $x+y=3,\ z=2$. 4.1.30 a) $8x-22y+z=48$, b) $x+y-2z=-4$. 4.1.31 a) $x=-1-t,\ y=2+t,\ z=4+2t$, b) $x=2+3t,\ y=3-7t,\ z=-1+7t$, c) neexistuje. 4.1.32 $\alpha=-3$. 4.1.33 $\alpha\in\langle 0,1\rangle$. 4.1.34 a) $\alpha=2\beta=1-\gamma\wedge\beta\neq0\wedge\beta\neq\frac{1}{2}$, b) $\alpha=2\beta\wedge\gamma\neq1-2\beta\wedge\beta\neq0\wedge\neq\frac{1}{2}$, c) $\alpha\neq2\beta$. 4.1.35 $11x-4y-3z=4$. 4.1.36 neexistuje. 4.1.37 $x=1+t,\ y=-1-t,\ z=2-t$, $x+y=0,\ x+z=3$. 4.1.38 $x=-3+t,\ y=-2-t,\ z=-1-t$. 4.1.39 α libovolné. 4.1.40 $2x+y=3$. 4.1.41 (u), $u(t)=-4-t+t^2$. 4.1.42 $x-2y+z=0,\ 5x-8y+9u=-2$. 4.1.43 a) $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $2x+y=0,\ 2x+2y=-1$, b) $x=1+2t,\ y=-1-t,\ z=2-t$, $x+2y=-1$, c) $\emptyset$, d) $\mathbb{R}^2$, $x=t,\ y=r$. 4.1.44 $x=-\frac{1}{2}+t,\ y=-t$, $2x+2y=-1$. 4.1.45 $2x+3y=-3$. 4.1.46 $x-y+3z=2$. 4.1.47 a) $x=4+t,\ y=t,\ z=-1-2t$,

b) $x = -10 - 3t,\ y = 19 + 4t,\ z = 17 + 4t$. 4.1.48 a) $x = \dfrac{1}{10} + 2t,\ y = \dfrac{1}{2} + 2t,\ z = \dfrac{29}{10} + t$, b) $x = \dfrac{11}{9} + 2t,\ y = \dfrac{5}{9} - 7t,\ z = \dfrac{31}{9} + t$, c) neexistuje. 4.1.49 neexistuje. 4.1.50 a) $x = 4 + 10t,\ y = 6 + 11t,\ z = 3t$, b) neexistuje. 4.1.51 a) $x = 8 + 6t,\ y = 9 + 7t,\ z = -11 - 8t,\ u = -15 - 11t$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, b) $x = 4 + t,\ y = 5 + t,\ z = 2,\ u = 7 + 3t$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. 4.1.52 $x = 42t,\ y = t,\ z = 7t,\ u = 11t$. 4.1.54 $\dim W \leq k + l + 1$. 4.1.57 b) codim P. 4.1.58 žádná z přímek W_1, W_2 nesmí být rovnoběžná s rovinou proloženou druhou z nich a bodem $\vec{a}$, jinak je úloha neřešitelná. 4.1.59 přímka W nesmí být rovnoběžná s rovinou proloženou jednou z přímek W_1, W_2 rovnoběžně s druhou z nich, jinak je úloha neřešitelná.

Kapitola 5

Matice a operátory

5.1 Inverzní matice a inverzní operátor

5.1.1

Nechť $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{pmatrix}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Nalezněte co nejjednodušší nutnou a postačující podmínku (kladenou na čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), aby A byl regulární operátor na prostoru $\mathbb{C}^2$.

5.1.2

Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ je regulární, je-li pro každé $x \in \mathcal{P}$, $t \in \mathbb{C}$:

a) $(Ax)(t) = x(t+1)$,

b) $(Ax)(t) = x(t+1) - x(t)$,

c) $(Ax)(t) = tx(t)$.

5.1.3

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$, $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zjistěte, zda je A regulární operátor (v závislosti na n), je-li pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n,n}$:

a) $A\mathbb{X} = \mathbb{X}^T$,

b) $A\mathbb{X} = \mathbb{X} + \mathbb{X}^T$,

c) $A\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{X}$,

d) $A\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{B}$.

5.1.4

Zjistěte, zda operátor derivování $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$ je regulární.

5.1.5

Zjistěte, zda operátory derivování D a integrování S na prostoru $\mathcal{P}$ jsou regulární. Vyšetřete regularitu operátorů DS a SD na prostoru $\mathcal{P}$.

5.1.6

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, A je regulární. Potom $h(AB) = h(BA) = h(B)$. Dokažte.

5.1.7

Musí být součet dvou regulárních operátorů na prostoru V opět regulární operátor na V? Uveďte vhodné příklady.

5.1.8

Může být součet dvou lineárních operátorů na prostoru V, z nichž jeden, resp. žádný není regulární operátor na V, regulární operátor? Uveďte vhodné příklady.

5.1.9

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, A je regulární, B není regulární. Potom žádný z operátorů AB, BA není regulární na prostoru V. Dokažte.

5.1.10

Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(V)$, nechť právě jeden z nich není regulární na prostoru V. Potom $A_1 A_2 \ldots A_n$ není regulární na prostoru V. Dokažte.

5.1.11

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, nechť žádný z nich není regulární na V. Může být AB regulární na prostoru V? Uveďte vhodné příklady. (Rozlište $\dim V < +\infty$ a $\dim V = +\infty$).

5.1.12

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, které komutují. Potom AB je regulární na prostoru V, právě když A i B jsou regulární na V. Dokažte.

5.1.13

Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(V)$ takové, že každé dva komutují. Potom operátor $A_1 A_2 \ldots A_n$ je regulární na prostoru V, právě když je regulární na V každý z operátorů $A_1, \ldots, A_n$. Dokažte.

5.1.14

a) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Potom A i B jsou regulární operátory na prostoru V, právě když jsou regulární na V operátory AB a BA. Dokažte.

b) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom A i B jsou regulární operátory na prostoru V_n, právě když jsou regulární na V_n operátory AB nebo BA. Dokažte.

5.1.15

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, nechť jsou oba regulární na prostoru V. Dokažte, že následující čtyři výroky jsou ekvivalentní:
$AB = BA$, $A^{-1}B = BA^{-1}$, $AB^{-1} = B^{-1}A$, $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5.1.16

Nechť $A, B, C, D \in \mathcal{L}(V)$, nechť operátory $A + B$ a $A - B$ jsou regulární na prostoru V. Potom existuje právě jedna dvojice lineárních operátorů X, Y na V taková, že $AX + BY = C$, $BX + AY = D$. Dokažte a nalezněte operátory X, Y.

5.1.17

Jak se změní tvrzení věty z příkladu 5.1.16, jestliže vypustíme předpoklad o regularitě některého, resp. obou operátorů $A + B$, $A - B$?

5.1.18

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$, $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k)$ jsou lineárně nezávislé soubory vektorů z prostoru V_n. Potom existuje regulární operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ takový, že $A\vec{x}_j = \vec{y}_j$ pro každé $j \in \widehat{k}$. Dokažte. Je A určen jednoznačně?

5.1.19

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $A^2 - A + I = \Theta$, kde I značí identický operátor. Potom A je regulární na prostoru V. Dokažte. Uveďte příklad operátoru A, který uvedenou podmínku splňuje. (Stačí uvažovat prostor dimenze dva.)

5.1.20

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $A^k = \Theta$. Potom operátor $I - A$ je regulární na prostoru V a platí $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$. Dokažte.

5.1.21

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$ takový, že existuje $\alpha \in T$, $\alpha \neq 1$, a platí $A^2 = \alpha A$. Potom operátor $I - A$ je regulární na V. Dokažte.

5.1.22

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť existuje právě jeden operátor $B \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $AB = I$ nebo $BA = I$. Potom A je regulární na prostoru V. Dokažte.

5.1.23

Dokažte, že výpočet inverzní matice k dané matici $\mathbb{A}$ n-tého řádu lze převést na řešení n soustav lineárních rovnic, z nichž každá obsahuje n rovnic o n neznámých a má za matici soustavy matici $\mathbb{A}$.

5.1.24

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární matice. Jak se změní matice $\mathbb{A}^{-1}$, jestliže v matici $\mathbb{A}$:

a) záměníme i-tý a j-tý řádek,

b) i-tý řádek vynásobíme číslem $\alpha \in T, \alpha \neq 0$,

c) k i-tému řádku přičteme libovolný α-násobek j-tého řádku, $\alpha \in T$ $(i \neq j)$?

Jak se změní inverzní matice při podobných transformacích sloupců?

5.1.25

Nalezněte všechny matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$, pro něž je $\mathbb{A}^3 = \mathbb{I}$.
(Návod: srovnejte $\mathbb{A}^2$ a $\mathbb{A}^{-1}$.)

5.1.26

Dokažte, že následující matice jsou regulární, a nalezněte k nim matice inverzní:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

d) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 3i & 1 & 2-i \\ 0 & 3 & 5 \\ 2i & i & 3+i \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.1.27

Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ jsou následující matice regulární, a nalezněte k nim matice inverzní:

a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

5.1.28

Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ jsou následující matice regulární, a nalezněte k nim matice inverzní:

a) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \delta \\ \alpha & \gamma & \delta \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \gamma & \gamma & \delta \\ \delta & \delta & \delta & \delta \end{pmatrix}$.

5.1.29

Dokažte, že následující matice n-tého řádu jsou regulární, a nalezněte k nim matice inverzní:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$.

5.1.30

Z přednášky víte, že lze-li čtvercovou matici $\mathbb{A}$ ekvivalentními řádkovými úpravami $E_1, E_2, \ldots, E_k$ převést na $\mathbb{I}$, pak $\mathbb{I} = \mathbb{M}_k \cdot \cdots \cdot \mathbb{M}_2 \cdot \mathbb{M}_1 \cdot \mathbb{A}$, kde $\mathbb{M}_i$ vznikla z $\mathbb{I}$ ekvivalentní úpravou E_i. V příkladu číslo 5.1.26 f) zkonstruujte matici $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí takového postupu, tj. $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{M}_k \cdot \cdots \cdot \mathbb{M}_2 \cdot \mathbb{M}_1$.

5.1.31

Spočtěte vše, co lze spočíst bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$: a) $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$, b) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, c) $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$, d) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$, e) $\mathbb{A}^T\mathbb{A}^{-1}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.32

Najděte $\mathbb{A}^{-1}$, pro taková α, pro která existuje, kde $\mathbb{A}$ je matice soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha^2 y & & & = & \alpha^3 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ -x & + & y & - & \alpha z & = & 1 \end{array}.$$

Pomocí této matice vyřešte soustavu v případě, kdy má jediné řešení.

5.1.33

Nechť jsou dány

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte ty z následujících součinů, které mají smysl. A u těch, které smysl nemají, vysvětlete proč.

1) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}^{-1}$, 2) $\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}$, 3) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, 4) $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$, 5) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1}$, 6) $(\mathbb{B}^T\mathbb{A})^{-1}$.

5.1.34

Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zkontrolujte, že $\mathbb{A}$ je regulární.

b) Najděte bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$ ty z následujících součinů matic, které mají smysl:

1) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, 2) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$, 3) $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$, 4) $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$.

5.1.35

Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ regulární?

b) Pro taková α najděte $\mathbb{A}^{-1}$.

c) Jak se operátor A definovaný pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ jako $A\vec{x} := \mathbb{A}\vec{x}$ jmenuje? (Nápověda: Uvědomte si, jakou operaci A s vektory v $\mathbb{R}^3$ provádí.)

5.1.36

Nechť je dána matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ neznáme.)

Z následujících matic vypočtěte všechny ty, které lze na základě zadaných údajů získat:

$$\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}^{-1}, \quad \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}, \quad \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1}, \quad \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}, \quad \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^T.$$

5.1.37

Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.301 & 1.012 & 3.333 \\ 0 & 0 & 2.56 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 3.56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ Gaussovou eliminací.

b) Určete $h(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})$.

5.1.38

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární matice. Potom $\mathbb{A}^T$ je také regulární matice a platí $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$. Dokažte.

5.1.39

Nalezněte matici přechodu od báze $\mathcal{Y}$ k bázi $\mathcal{X}$, tedy ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$:

a) v prostoru $\mathbb{C}^3$, je-li $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$,

b) v prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$, je-li $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right)$,

$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \right)$,

c) v prostoru $\mathcal{P}_n$, je-li $\mathcal{X} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_i(t) = (t - \alpha)^{i-1}$ pro každé $i \in \hat{n}$, $t \in \mathbb{C}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$.

5.1.40

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze prostoru $\mathbb{C}^3$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$. Nalezněte:

a) ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$,

b) ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$,

c) $(\vec{x})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

d) $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5.1.41

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze prostoru V_4. Nechť pro každé $\vec{x} \in V_4$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$, platí: $\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 - 2\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + 3\alpha_4$, $\beta_4 = \alpha_4 - 3\alpha_1$. Nalezněte ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$.

5.1.42

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze prostoru $\mathbb{R}^3$, nechť pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, platí: $\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3$, $\alpha_2 = \beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3$, $\alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 - 4\beta_3$. Nalezněte:

a) bázi $\mathcal{Y}$, je-li $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, b) bázi $\mathcal{X}$, je-li $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$.

5.1.43

Jak se změní matice přechodu od báze $\mathcal{Y}$ k bázi $\mathcal{X}$, tj. ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$, jestliže:

a) v bázi $\mathcal{X}$ zaměníme i-tý a j-tý vektor,

b) v bázi $\mathcal{Y}$ zaměníme k-tý a l-tý vektor,

c) v bázi $\mathcal{X}$ zaměníme i-tý a j-tý vektor a v bázi $\mathcal{Y}$ zaměníme k-tý a l-tý vektor?

5.1.44

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze prostoru V_n. Potom ${}^{\mathcal{X}^\#}I^{\mathcal{Y}^\#} = \left({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}\right)^T$. Dokažte.

5.1.45

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ jsou báze prostoru V_n. Potom ${}^{\mathcal{Z}}I^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}\,\mathcal{Z}}I^{\mathcal{Y}}$. Dokažte.

5.1.46

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ báze prostoru V_n. Potom ${}^{\mathcal{X}}A = {}^{\mathcal{Y}}A$, právě když ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$ komutuje s ${}^{\mathcal{X}}A$ nebo ${}^{\mathcal{Y}}A$. Dokažte.

5.1.47

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ báze prostoru $\mathbb{C}^2$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dokažte, že A je regulární operátor na prostoru $\mathbb{C}^2$, a nalezněte ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1})$ a ${}^{\mathcal{E}}(A^{-1})$.

5.1.48

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ báze prostoru $\mathbb{R}^3$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Dokažte, že A je regulární operátor na prostoru $\mathbb{R}^3$, a nalezněte ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$, je-li
$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ báze prostoru $\mathbb{R}^3$.

5.1.49

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2,2})$, $A\mathbb{X} = -\mathbb{X}^T$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Dokažte, že A je regulární operátor na prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$, a nalezněte ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{E}}$, je-li $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right)$ báze prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

5.1.50

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, $(Ax)(t) = x(t+1) - 2x(t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, $t \in \mathbb{C}$. Dokažte, že A je regulární operátor na prostoru $\mathcal{P}_3$ a nalezněte ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1})^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ báze prostoru $\mathcal{P}_3$ a platí: $x_1(t) = 3 - t + 2t^2$, $x_2(t) = 2 + 3t - t^2$, $x_3(t) = -1 + 2t + 4t^2$, $y_1(t) = -8 - 3t - 2t^2$, $y_2(t) = -2 - t + t^2$, $y_3(t) = -13 - 10t - 4t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

5.1.51

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ báze prostoru V_3,

$A\vec{x} = (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\vec{x}_2 + (\alpha_3 + 2\alpha_1)\vec{x}_3$ pro každé $\vec{x} \in V_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Dokažte, že A je regulární operátor na prostoru V_3, a nalezněte ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1})$.

5.1.52

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Dokažte, že řešení maticové rovnice $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$, $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{B}$ lze převést na řešení n soustav lineárních rovnic, z nichž každá obsahuje n rovnic o n neznámých a má za matici soustavy matici $\mathbb{A}$, resp. matici $\mathbb{A}^T$.

5.1.53

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Potom

a) Maticová rovnice $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$ je řešitelná, právě když $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\mathbb{B})$.

b) Maticová rovnice $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{B}$ je řešitelná, právě když $h(\mathbb{A}) = h\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix}$.

Dokažte.

5.1.54

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$, $h(\mathbb{B}) > h(\mathbb{A})$. Potom jsou maticové rovnice $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$, $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{B}$ neřešitelné. Dokažte.

5.1.55

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Maticová rovnice $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$, resp. $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{B}$ má právě jedno řešení, právě když je $\mathbb{A}$ regulární. Dokažte. Nalezněte toto řešení.

5.1.56

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$, $\mathbb{A}$ není regulární. Potom maticová rovnice $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$, resp. $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{B}$ je buď neřešitelná, nebo má nekonečně mnoho řešení. Dokažte.

5.1.57

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Maticová rovnice $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{O}$, resp. $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{O}$ je vždy řešitelná a má nenulové řešení, právě když matice $\mathbb{A}$ není regulární. Dokažte.

5.1.58

Nalezněte množinu všech řešení následujících maticových rovnic:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{X} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{X} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbb{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

h) $\mathbb{X} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \mathbb{X} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

l) $\mathbb{X} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Výsledky

5.1.1 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. 5.1.2 a) ano, b), c) ne. 5.1.3 a) ano, b) pouze pro $n = 1$, c), d) pouze pro $\mathbb{B}$ regulární. 5.1.4 ne. 5.1.5 regulární je pouze DS. 5.1.7 ne, např. $I + (-I) = \Theta$. 5.1.8 ano, např.

$\Theta + I = I$, nebo součet projektorů $A_P + A_Q = I$, kde $P, Q \subset\subset V$ a $P \oplus Q = V$. 5.1.11 pouze na prostoru V, dim $V = +\infty$, např.DS. 5.1.16 $X = \frac{1}{2}\left[(A+B)^{-1}(C+D) + (A-B)^{-1}(C-D)\right]$, $Y = \frac{1}{2}\left[(A+B)^{-1}(C+D) - (A-B)^{-1}(C-D)\right]$. 5.1.17 pokud $A+B$ i $A-B$ jsou monomorfní, pak X, Y buď neexistují, nebo jsou dány jednoznačně; v ostatních případech X, Y buď neexistují, nebo je jich nekonečně mnoho. 5.1.18 jedině pro $k = n$. 5.1.19 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$. 5.1.21 A je regulární, protože $B = \frac{1}{1-\alpha}A + I$ splňuje $AB = I = BA$. 5.1.24 a) zamění se i-tý a j-tý sloupec, b) i-tý sloupec se vynásobí číslem $\frac{1}{\alpha}$, c) od j-tého sloupce se odečte α-násobek i-tého sloupce. Jako a), b), c), ale s řádky. 5.1.25 $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ nebo $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -1-\alpha \end{pmatrix}$, kde $\alpha + \alpha^2 + \beta\alpha = -1$. 5.1.26 a) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & 9 & -4 \\ 1 & -7 & 3 \\ 3 & -24 & 11 \end{pmatrix}$, e) $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 16 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, g) $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2-9i & 1+2i & 3+i \\ 10 & 5+5i & -15 \\ -6 & 2-3i & 9 \end{pmatrix}$, h) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -\frac{23}{2} & -1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, k) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \\ -8 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. 5.1.27 a) pro každé α, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, b) pro žádné α, c) $\alpha \neq 0$, $\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\alpha \neq \pm 1$, $\frac{1}{\alpha^2-1}\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$, e) $\alpha \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2\alpha^2-1}\begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha & \alpha^2-1 \\ \alpha & -1 & \alpha \\ \alpha^2-1 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$, f) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pm\sqrt{2}$, $\frac{1}{\alpha(2-\alpha^2)}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 1-\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & \alpha \\ 1-\alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$, g) $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{\alpha^3+1}\begin{pmatrix} \alpha^2 & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$, h) $\alpha \neq 1$, $\frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.1.28 a) $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, b) $\alpha \neq 0 \wedge \gamma \neq \beta \wedge \gamma \neq \delta$,

$\frac{1}{\alpha(\delta-\gamma)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} \delta(\gamma-\beta) & \beta\delta-\gamma^2 & \beta(\gamma-\delta) \\ 0 & \alpha(\gamma-\delta) & \alpha(\delta-\gamma) \\ \alpha(\beta-\gamma) & \alpha(\gamma-\beta) & 0 \end{pmatrix}$, c) $\delta \neq 0 \wedge \alpha \neq \beta \wedge \beta \neq \gamma \wedge \gamma \neq \delta$,

$$\frac{1}{\delta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)}\begin{pmatrix} \delta(\beta-\gamma)(\gamma-\delta) & \delta(\gamma-\beta)(\gamma-\delta) & 0 & 0 \\ \delta(\gamma-\beta)(\gamma-\delta) & \delta(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta) & \delta(\alpha-\beta)(\delta-\gamma) & 0 \\ 0 & \delta(\beta-\alpha)(\gamma-\delta) & \delta(\alpha-\beta)(\beta-\delta) & \delta(\alpha-\beta)(\gamma-\beta) \\ 0 & 0 & \delta(\alpha-\beta)(\gamma-\beta) & \gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma) \end{pmatrix}.$$

5.1.29 a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & \cdots & (-a)^{n-1} \\ 0 & 1 & -a & \cdots & (-a)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-a)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

f) $-\dfrac{1}{a(n+a)} \begin{pmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n-a \end{pmatrix}$.

5.1.30 např. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.1.31 a) $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ nemá smysl, b) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$ nemá smysl, e) $\mathbb{A}^{\top}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, neboť $\mathbb{A}$ je symetrická, tj. $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. 5.1.32 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$, $\mathbb{A}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2(\alpha+1)} \begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha & -\alpha^3 & -\alpha^3 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ -1-\alpha & \alpha^2+\alpha & 0 \end{pmatrix}$, řešení je $\mathbb{A}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2-\alpha \\ 1 \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$.

5.1.33 $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T = (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Ostatní součiny nelze určit. 5.1.34 $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, součin $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$ nemá smysl a $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 5.1.35 a) $\mathbb{A}$ je regulární pro všechna α,
b) $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{\top} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
c) operátor rotace – vektor $\vec{x}$ si po násobení touto maticí zachová 3. složku, zatímco jeho průmět do roviny generované vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ se otočí o úhel α po směru ručiček hodin; celkově to tedy znamená, že se vektor $\vec{x}$ otočí kolem „osy“ $\vec{e}_3$ o úhel α. 5.1.36 spočítat lze pouze

$$\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a $\mathbb{A}^\top\mathbb{B}^\top = (\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 5.1.37 a) $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $h(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}) = 3$, neboť $h(\mathbb{B}) = 3$ a $\mathbb{A}$ je regulární.

5.1.39 a) $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha & \cdots & (-\alpha)^k & \cdots & (-\alpha)^{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}(-\alpha) & \cdots & \binom{k}{1}(-\alpha)^{k-1} & \cdots & \binom{n-1}{1}(-\alpha)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{k}{2}(-\alpha)^{k-2} & \cdots & \binom{n-1}{2}(-\alpha)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. 5.1.40 a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, c) $\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. 5.1.41 $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -6 \\ 18 & -2 & -4 & 12 \\ 9 & -9 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

5.1.42 a) $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$, b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. 5.1.43 a) zamění se i-tý a j-tý řádek, b) zamění se k-tý a l-tý sloupec, c) zamění se i-tý a j-tý řádek a k-tý a l-tý sloupec. 5.1.47 ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a ${}^{\mathcal{E}}(A^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 5.1.48 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5.1.49 $\begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & -8 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & -5 & -3 \\ -6 & -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. 5.1.50 $\mathbb{I}$.

5.1.51 $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 5.1.55 $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, resp. $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$. 5.1.58 a) $\left\{\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}\right\}$,

c) nemá řešení, d) nemá řešení, e) $\left\{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}\right\}$, f) $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1-3\alpha}{2} & 1-3\beta \\ \alpha & 2\beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$,

g) $\left\{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -12 & -2 & -7 \\ 60 & -26 & 41 \end{pmatrix}\right\}$, h) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right\}$, i) $\left\{\begin{pmatrix} 1-3\alpha & 2-3\beta & 1-3\gamma \\ 2+\alpha & 1+\beta & 2+\gamma \\ 1+5\alpha & 2+5\beta & 3+5\gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\right\}$,

j) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right\}$, k) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right\}$,

l) pro $a = 0$ nemá řešení, pro $a \neq 0$: $\left\{\dfrac{1}{a}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n\end{pmatrix}\right\}$.

5.2 Determinant matice a operátoru

5.2.1

Určete počet inverzí v následujících permutacích:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & \dots & 3n-1 & 3 & 6 & \dots & 3n \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 & 3 & 6 & \dots & 3n & 1 & 4 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n & 3n+1 & 3n+2 & \dots & 4n \\ 1 & 5 & \dots & 4n-3 & 2 & 6 & \dots & 4n-2 & 3 & 7 & \dots & 4n-1 & 4 & 8 & \dots & 4n \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n+1 & \dots & 4n-1 & 4n \\ 4n & 4n-4 & \dots & 4 & 4n-1 & 4n-5 & \dots & 3 & 4n-2 & \dots & 6 & 2 & 4n-3 & \dots & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & k & j & j+1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & k & j+1 & \dots & k-1 & j & k+1 & \dots & n \end{pmatrix}$.

5.2.2

Určete znaménka následujících permutací:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2.3

Kolik inverzí tvoří:

a) číslo 1 v permutaci $\pi \in S_n$ takové, že $\pi(k) = 1$,

b) číslo n v permutaci $\pi \in S_n$ takové, že $\pi(k) = n$?

5.2.4

Jaký je největší počet inverzí může mít permutace z S_n? Jaká je to permutace?

5.2.5

Kolik inverzí je ve všech permutacích množiny $\widehat{n}$ dohromady?

5.2.6

Počet permutací z S_n, které mají k inverzí, je stejný jako počet permutací z S_n, které mají $\binom{n}{2} - k$ inverzí. Dokažte.

5.2.7

Nechť k je celé číslo, $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$. Potom existuje permutace $\pi \in S_n$, která má právě k inverzí. Dokažte.

5.2.8

Nechť $\pi \in S_n$, $I_\pi = k$, $\sigma = (\pi(n) \quad \pi(n-1) \quad \dots \quad \pi(1))$. Určete počet inverzí v permutaci σ.

5.2.9

Určete čísla i, k tak, aby permutace z S_9:

a) $\pi = (1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9)$ byla sudá,

b) $\pi = (1\ i\ 2\ 5\ k\ 4\ 8\ 9\ 7)$ byla lichá.

5.2.10

Nechť $r, n \in \mathbb{N}, r < n, \pi \in S_n$, nechť $\pi_{r+1} = (\pi(r{+}1) \quad \pi(r{+}2) \quad \dots \quad \pi(n) \quad \pi(1) \quad \pi(2) \quad \dots \quad \pi(r))$. Potom sgn $\pi_{r+1} = (-1)^{(n-1)r} \cdot \operatorname{sgn} \pi$. Dokažte.

5.2.11

Nechť $r, n \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Nechť $\pi \in S_n$ taková, že $\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(r)$ a $\pi(r+1) < \pi(r+2) < \ldots < \pi(n)$. Určete I_π.

5.2.12

Určete složenou permutaci $\pi_1 \circ \pi_2$, je-li:

a) $\pi_1 = (5\ 3\ 2\ 4\ 1)$, $\pi_2 = (2\ 4\ 5\ 1\ 3)$,

b) $\pi_1 = (7\ 3\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5)$, $\pi_2 = (4\ 7\ 1\ 3\ 6\ 5\ 2)$,

c) $\pi_1 = (2\ 7\ 1\ 4\ 8\ 6\ 3\ 5)$, $\pi_2 = (1\ 3\ 8\ 7\ 6\ 2\ 5\ 4)$.

5.2.13

Určete inverzní permutaci k permutaci:

a) $(4\ 1\ 5\ 2\ 3)$,

b) $(2\ 6\ 4\ 3\ 1\ 5)$,

c) $(5\ 8\ 2\ 1\ 4\ 7\ 3\ 6)$,

d) $(2\ 3\ 5\ 9\ 1\ 8\ 7\ 4\ 6)$.

5.2.14

Nalezněte permutaci σ, která vyhovuje rovnici:

a) $\sigma\pi_1 = \pi_2$, je-li $\pi_1 = (4\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5)$, $\pi_2 = (2\ 6\ 1\ 3\ 4\ 5)$,

b) $\pi_1\sigma = \pi_2$, je-li $\pi_1 = (6\ 5\ 1\ 2\ 4\ 3)$, $\pi_2 = (2\ 3\ 6\ 5\ 4\ 1)$,

c) $\pi_1\sigma\pi_2 = \pi_3$, je-li $\pi_1 = (7\ 3\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4)$, $\pi_2 = (3\ 1\ 2\ 7\ 4\ 5\ 6)$, $\pi_3 = (5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 7\ 2)$.

5.2.15

Určete permutaci π^k, je-li:

a) $\pi = (5\ 2\ 4\ 1\ 3)$, $k = 100$,

b) $\pi = (2\ 3\ 6\ 7\ 1\ 4\ 5)$, $k = 259$,

c) $\pi = (3\ 5\ 4\ 1\ 7\ 10\ 2\ 6\ 9\ 8)$, $k = 1000$.

5.2.16

Rozložte následující permutace na transpozice:

a) $(4\ 1\ 3\ 5\ 2)$,

b) $(3\ 6\ 5\ 1\ 4\ 2)$,

c) $(7\ 1\ 5\ 8\ 4\ 2\ 3\ 6)$,

d) $(5\ 3\ 1\ 4\ 10\ 7\ 9\ 6\ 2\ 8)$.

5.2.17

Nechť $M = \{\pi \in S_n | (\forall k \in \widehat{n})(\pi(k) \neq k)\}$. Určete počet prvků množiny M.
Návod: Dokažte, že tento počet r_n vyhovuje rekurentnímu vztahu $r_n = (n-1)(r_{n-1} + r_{n-2})$ pro $n \geq 2$, $r_0 = 1$, $r_1 = 0$.

5.2.18

Zjistěte, které z následujících součinů (případně opatřených znaménkem minus) jsou členy determinantu matice $\mathbb{A}$ příslušného řádu, a určete, jakým znaménkem jsou opatřeny:

a) $\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{26}\mathbb{A}_{35}$,

b) $\mathbb{A}_{72}\mathbb{A}_{31}\mathbb{A}_{25}\mathbb{A}_{43}\mathbb{A}_{52}\mathbb{A}_{16}\mathbb{A}_{64}$,

c) $\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{34}\cdots\mathbb{A}_{n-1,n}\mathbb{A}_{kk}$, $k \in \widehat{n}$, $n > 1$,

d) $\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{34}\mathbb{A}_{17}\mathbb{A}_{65}\mathbb{A}_{72}\mathbb{A}_{41}$,

e) $\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{2n}\mathbb{A}_{3,n-1}\cdots\mathbb{A}_{n2}$.

5.2.19

Určete čísla i, k tak, aby součin:

a) $\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{61}\mathbb{A}_{16}\mathbb{A}_{i2}\mathbb{A}_{45}\mathbb{A}_{k4}$ byl členem determinantu matice $\mathbb{A}$ šestého řádu,

b) $-\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{3k}\mathbb{A}_{76}\mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{57}\mathbb{A}_{4i}\mathbb{A}_{65}$ byl členem determinantu matice $\mathbb{A}$ sedmého řádu.

5.2.20

Kolik nenulových členů má determinant matice $\mathbb{A}$ řádu n, jestliže $\mathbb{A}_{11} = 0$ a všechny ostatní prvky determinantu jsou různé od nuly?

5.2.21

Nechť $i, k \in \widehat{n}$. V kolika členech determinantu matice $\mathbb{A}$ řádu n se vyskytuje prvek determinantu $\mathbb{A}_{ik}$?

5.2.22

Nalezněte všechny členy determinantu matice $\mathbb{A}$ čtvrtého řádu, které obsahují prvek $\mathbb{A}_{23}$ a jsou opatřeny znaménkem minus.

5.2.23

Nalezněte všechny členy determinantu matice $\mathbb{A}$ pátého řádu tvaru $\pm\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{3i}\mathbb{A}_{4j}\mathbb{A}_{5k}$. Co dostaneme, jestliže ze součtu těchto členů vytkneme $\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}$?

5.2.24

Určete, jaké znaménko má v determinantu $\mathbb{A}$ řádu n součin prvků a) na hlavní diagonále, b) na vedlejší diagonále.

5.2.25

Pouze na základě definice determinantu nalezněte koeficienty polynomu p u členů x^α, pro zadané hodnoty exponentu α, je-li:

a) $p(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 2 \\ x & x & 1 \\ 2 & x & 2x \end{vmatrix}$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$,

b) $p(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x & x \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$,

c) $p(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & x & 2 \\ 1 & 2 & 2x & 3 \\ -1 & x & 3 & -x \end{vmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$.

5.2.26

Pouze na základě definice determinantu vypočtěte:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\ 0 & \mathbb{A}_{22} & \cdots & \mathbb{A}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{nn} \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13} & \mathbb{A}_{14} & \mathbb{A}_{15} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23} & \mathbb{A}_{24} & \mathbb{A}_{25} \\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{41} & \mathbb{A}_{42} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{51} & \mathbb{A}_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} \mathbb{A}_{11} & \cdots & \mathbb{A}_{1,n-1} & \mathbb{A}_{1n} \\ \mathbb{A}_{21} & \cdots & \mathbb{A}_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \mathbb{A}_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

5.2.27

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ taková, že na průsečících k řádků a l sloupců má samé nulové prvky, nechť $k + l > n$. Potom $\det \mathbb{A} = 0$. Dokažte.

5.2.28

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ taková, že počet jejích nulových prvků je větší než $n^2 - n$. Potom $\det \mathbb{A} = 0$. Dokažte.

5.2.29

Rozložte následující polynomy v proměnné x na kořenové činitele, aniž počítáte příslušné determinanty (použitím definice a vlastností determinantu matice):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ x & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & x & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & x & n \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & x-n \\ 1 & 2 & \cdots & x-n+1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x-2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$.

5.2.30

Jak se změní hodnota determinantu matice n-tého řádu $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, jestliže:

a) řádky napíšeme v obráceném pořadí,

b) sloupce napíšeme v obráceném pořadí,

c) matici překlopíme podle hlavní diagonály,

d) matici překlopíme podle vedlejší diagonály,

e) každý prvek matice zaměníme s prvkem symetricky položeným vzhledem k středu matice,

f) každý prvek matice vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$,

g) každý prvek $\mathbb{A}_{ij}$ vynásobíme číslem $\alpha^{i-j}, \alpha \neq 0$,

h) od každého řádku kromě posledního odečteme následující řádek a od posledního řádku odečteme původní první řádek,

i) ke každému sloupci (počínaje posledním a konče druhým) přičteme předcházející sloupec a k prvnímu sloupci přičteme původní poslední sloupec,

j) každý prvek matice nahradíme číslem komplexně sdruženým?

5.2.31

Vypočtěte determinant matice, ve které je součet řádků se sudými indexy roven součtu řádků s lichými indexy.

5.2.32

Nalezněte vztah mezi determinanty D a D', jestliže

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

5.2.33

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární. Nalezněte všechna čísla $\alpha \in T$ taková, že $\det(\alpha\mathbb{A}) = \det \mathbb{A}$, je-li a) $T = \mathbb{R}$, b) $T = \mathbb{C}$.

5.2.34

Dokažte následující vztahy:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

5.2.35

Nechť M je množina všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ $(n \geq 2)$, které mají v každém řádku a v každém sloupci právě jeden prvek rovný jedné a všechny ostatní prvky jsou rovny nule. Vypočtěte $\sum\limits_{\mathbb{A}\in M} \det \mathbb{A}$. Kolik prvků má množina M?

5.2.36

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$, nechť matice $\mathbb{A}_\pi$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ provedením permutace $\pi \in S_n$ na její řádky. Vypočtěte $\sum\limits_{\pi\in S_n} \det \mathbb{A}_\pi$.

5.2.37

Čísla 253, 529, 391 jsou dělitelné 23. Dokažte, že $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ je rovněž dělitelný 23, aniž spočítáte jeho hodnotu.

5.2.38

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, a_{ij} jsou celá nezáporná čísla rovná nejvýše devíti. Označme N_i číslo zapsané ciframi i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ se zachováním jejich pořadí. Potom $\det \mathbb{A}$ je dělitelný největším společným dělitelem čísel $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Dokažte.

5.2.39

Nechť $\varphi : T^{n,n} \to T$, $\varphi(\mathbb{A}) = \det \mathbb{A}$. Je $\varphi \in (T^{n,n})^{\#}$?

5.2.40

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ takové, že $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{O}$, $\mathbb{A} \neq \mathbb{O}$, $\mathbb{B} \neq \mathbb{O}$. Potom $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B} = 0$. Dokažte.

5.2.41

Nechť funkce f_{ik}, $i, k \in \widehat{n}$, mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivace. Potom

$$\left[\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}\right]_{x=x_0} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x_0) & \cdots & f_{1n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k-1,1}(x_0) & \cdots & f_{k-1,n}(x_0) \\ f'_{k,1}(x_0) & \cdots & f'_{kn}(x_0) \\ f_{k+1,1}(x_0) & \cdots & f_{k+1,n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1}(x_0) & \cdots & f_{nn}(x_0) \end{vmatrix}. \text{ Dokažte.}$$

5.2.42

Nalezněte součet algebraických doplňků všech prvků determinantu:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5.2.43

Vypočtěte determinanty následujících matic.

a) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$,

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, kde $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$,

e) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

f) $\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

g) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \end{vmatrix}$,

h) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$, všechna písmena komplexní,

i) $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$,

j) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$,

k) $\begin{vmatrix} 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \end{vmatrix}$.

5.2.44

Nechť $p, q \in \mathbb{C}$ a nechť a, b, c jsou všechny kořeny rovnice $x^3+px+q=0$. Vypočtěte $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

5.2.45

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}^k = \mathbb{O}$. Potom $\det \mathbb{A} = 0$. Dokažte. Platí obrácené tvrzení? Uveďte vhodné příklady.

5.2.46

Nechť $\mathbb{A} \in T^{2,2}$. Potom $\mathbb{A}^2 = \mathbb{O}$, právě když pro každé přirozené číslo $k > 2$ je $\mathbb{A}^k = \mathbb{O}$. Dokažte. (Návod: viz příklad 5.2.45.)

5.2.47

Nalezněte všechny matice $\mathbb{A} \in T^{2,2}$, pro které platí $\mathbb{A}^3 = \mathbb{O}$. (Návod: viz příklad 5.2.45.)

5.2.48

Vypočtěte determinanty následujících lineárních operátorů.

a) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $Ax = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$,

b) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2,2})$, $A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbb{X}$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2}$,

c) $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, $Ax = x(t+1) - 2x(t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, $t \in \mathbb{C}$,

d) $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$.

Použitím řádkových a sloupcových úprav a věty o rozvoji determinantu vypočtěte příklady 5.2.49-5.2.62.

5.2.49

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.2.50

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ y & y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

5.2.51

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

5.2.52

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.53

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

5.2.54

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.55

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

5.2.56

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

5.2.57

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - b_n & a_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}.$$

5.2.58

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \cdots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.59

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

5.2.60

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}, n \geq 2.$$

5.2.61

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

5.2.62

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n & a_n \end{vmatrix}.$$

5.2.63

Spočítejte $\det \mathbb{A}$, $\mathbb{A}$, je-li a) $\mathbb{A}_{ij} = \min\{i,j\}$, b) $\mathbb{A}_{ij} = \max\{i,j\}$, c) $\mathbb{A}_{ij} = |i-j|$.

Příklady 5.2.64-5.2.68 vypočtěte rozkladem na součet. Všechny matice v těchto příkladech jsou reálné.

5.2.64

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

5.2.65

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \cdots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & 1 + x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}.$$

5.2.66

$$\begin{vmatrix} \sin(2\alpha_1) & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \cdots & \sin(2\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

5.2.67

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

5.2.68

Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ jsou čtvercové matice n-tého řádu takové, že:

a) $\mathbb{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{jk}$,

b) $\mathbb{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj}$,

c) $\mathbb{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ki}\mathbb{B}_{jk}$,

d) $\mathbb{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ki}\mathbb{B}_{kj}$.

Potom $\det \mathbb{C} = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$. Dokažte.

5.2.69

Vypočtěte čtverce následujících determinantů:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$.

5.2.70

Vypočtěte $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$ nalezením jeho čtverce.

Rozkladem na součin dvou determinantů vypočtěte determinanty reálných matic v příkladech 5.2.71-5.2.79:

5.2.71

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

5.2.72

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

5.2.73

$$\begin{vmatrix} \sin(2\alpha_1) & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \cdots & \sin(2\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

5.2.74

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

5.2.75

$$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & 4^{n-1} & \cdots & (n+1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & (n+2)^{n-1} & \cdots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

5.2.76

$$\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}.$$

5.2.77

$$\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \frac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \frac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \frac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \frac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \cdots & \frac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

5.2.78

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \text{ kde } s_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k,\ k = 0, 1, \ldots, 2n-2.$$

5.2.79

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}, \text{ kde } s_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k,\ k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

5.2.80

Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$, (pro $n \geq 3$), kde p, q jsou konstanty nezávislé na n, z nichž alespoň jedna je různá od nuly. Potom platí:

a) Pro $q = 0$ je $D_n = p^{n-2}D_2$.

b) Je-li $q \neq 0$ a má-li rovnice $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ kořeny λ_1, λ_2, je:

   1) $D_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, pokud $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

2) $D_n = (C_1 + nC_2)\lambda_1^n$, pokud $\lambda_1 = \lambda_2$,

kde C_1, C_2 jsou konstanty jednoznačně určené čísly D_1, D_2.

Dokažte.

Použitím příkladu 5.2.80 vypočtěte determinanty v příkladech 5.2.81-5.2.90:

5.2.81

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

5.2.82

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.2.83

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

5.2.84

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5.2.85

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5.2.86

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

5.2.87

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

5.2.88

$$\begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+1 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}.$$

5.2.89

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{x} \end{vmatrix}.$$

5.2.90

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Odvozením rekurentního vztahu vypočtěte determinanty matic v příkladech 5.2.91-5.2.113:

5.2.91

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

5.2.92

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

5.2.93

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a \\ b & 0 & a & \cdots & a & a \\ b & b & 0 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & 0 \end{vmatrix}.$$

5.2.94

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(determinant řádu } 2n).$$

5.2.95

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.96

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.97

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.2.98

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

5.2.99

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} (\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}).$$

5.2.100

$$\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \cdots & 1!a_{n-1} & a_n \\ -n & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

5.2.101

$$\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

5.2.102

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{(Vandermondův determinant).}$$

5.2.103

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.104

$$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.105

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

5.2.106

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-1} & \dfrac{x_2}{x_2-1} & \cdots & \dfrac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

5.2.107

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}, \ f_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \cdots + a_{kk} \text{ pro } k \in \widehat{n-1}.$$

5.2.108

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(\cos\varphi_1) & f_1(\cos\varphi_2) & \cdots & f_1(\cos\varphi_n) \\ f_2(\cos\varphi_1) & f_2(\cos\varphi_2) & \cdots & f_2(\cos\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1}(\cos\varphi_1) & f_{n-1}(\cos\varphi_2) & \cdots & f_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} f_k(x) = a_{k0}x^k + a_{k1}x^{k-1} + \cdots + a_{kk} \\ \text{pro } k \in \widehat{n-1} \end{matrix}.$$

5.2.109

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

5.2.110 *

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

5.2.111 *

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

5.2.112 *

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

5.2.113 *

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, \ 1 \le k \le n-1.$$

Vhodnou metodou spočítejte determinanty v příkladech 5.2.114-5.2.127:

5.2.114

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$

5.2.115

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+2}{1} & \cdots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \binom{m+3}{2} & \cdots & \binom{m+n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \binom{m+n+1}{1} & \cdots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}.$$

5.2.116

$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & \cdots & n! \\ 1! & 2! & 3! & \cdots & (n+1)! \\ 2! & 3! & 4! & \cdots & (n+2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n! & (n+1)! & (n+2)! & \cdots & (2n)! \end{vmatrix}.$$

5.2.117

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix} \quad \{a_j\}_{j=1}^{2n-1} \text{ jsou prvky geometrické posloupnosti.}$$

5.2.118

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & x^{n-1} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

5.2.119

$$\begin{vmatrix} a^p - x & a^{p+1} - x & \cdots & a^{p+n-1} - x \\ a^{p+n} - x & a^{p+n+1} - x & \cdots & a^{p+2n-1} - x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{p+n(n-1)} - x & a^{p+n(n-1)+1} - x & \cdots & a^{p+n^2-1} - x \end{vmatrix}.$$

5.2.120

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

5.2.121 *

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

5.2.122

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.123 *

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.124

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+4 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+2^n \end{vmatrix}.$$

5.2.125

$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$$

5.2.126

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

5.2.127

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix} \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

5.2.128

Nechť $D = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$.

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_0(x_2) & \cdots & f_0(x_n) \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$,

kde $f_j(x) = a_{0j} + a_{1j}x + \cdots + a_{n-1,j}x^{n-1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Výsledky

5.2.1 a) 5, b) 13, c) $\frac{n(n-1)}{2}$, d) $\frac{3}{2}n(n-1)$, e) $\frac{n(3n+1)}{2}$, f) $3n(n-1)$, g) $n(5n+1)$, h) $k-j$, i) $2(k-j)-1$. 5.2.2 a) 1, b) 1, c) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, d) $(-1)^n$, e) $(-1)^n$, f) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 5.2.3 a) $k-1$, b) $n-k$. 5.2.4 $\frac{n(n-1)}{2}$, $(n, n-1, \ldots, 1)$. 5.2.5 $\frac{n!}{2}\binom{n}{2}$. 5.2.8 $\binom{n}{2} - k$. 5.2.9 a) $i = 8, k = 3$, b) $i = 3, k = 6$. 5.2.11 $\sum_{k=1}^{r} \pi(k) - \frac{r(r+1)}{2}$. 5.2.12 a) (3 4 1 5 2), b) (2 5 7 1 4 6 3), c) (2 1 5 3 6 7 8 4). 5.2.13 a) (2 4 5 1 3), b) (5 1 4 3 6 2), c) (4 3 7 5 1 8 6 2), d) (5 1 2 8 3 9 7 6 4). 5.2.14 a) (4 6 3 2 5 1), b) (4 6 1 2 5 3), c) (4 2 6 7 1 3 5). 5.2.15 a) ε, b) ε, c) π. 5.2.16 a) $\tau_{14}\tau_{24}\tau_{45}$, b) $\tau_{13}\tau_{26}\tau_{34}\tau_{35}$, c) $\tau_{17}\tau_{27}\tau_{35}\tau_{48}\tau_{58}\tau_{67}\tau_{78}$, d) $\tau_{15}\tau_{23}\tau_{35}\tau_{510}\tau_{67}\tau_{79}\tau_{89}\tau_{910}$. 5.2.17 $n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$. 5.2.18 pouze a) minus, e) $(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$. 5.2.19 a) $i = 3, k = 2$, b) $i = 4, k = 1$. 5.2.20 $(n-1)!(n-1)$. 5.2.21 $(n-1)!$. 5.2.22 $-\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{32}\mathbb{A}_{44}$, $-\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{34}\mathbb{A}_{41}$, $-\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{31}\mathbb{A}_{42}$. 5.2.23 $\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{31}\mathbb{A}_{45}\mathbb{A}_{52}$, $\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{32}\mathbb{A}_{41}\mathbb{A}_{55}$,

$\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{35}\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{51}$, $-\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{31}\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{55}$, $-\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{32}\mathbb{A}_{45}\mathbb{A}_{51}$, $-\mathbb{A}_{14}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{35}\mathbb{A}_{41}\mathbb{A}_{52}$, $\begin{vmatrix} \mathbb{A}_{41} & \mathbb{A}_{42} & \mathbb{A}_{45} \\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32} & \mathbb{A}_{35} \\ \mathbb{A}_{51} & \mathbb{A}_{52} & \mathbb{A}_{55} \end{vmatrix}$.

5.2.24 a) 1, b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 5.2.25 a) -3, 6, b) -3, 1, c) 6, 0. 5.2.26 a) -21, b) 0, c) $\prod_{j=1}^{n}\mathbb{A}_{jj}$, d) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}\mathbb{A}_{j,n-j+1}$. 5.2.29 a) $(-1)^{n-1}n\prod_{j=1}^{n-1}(x-j)$, b) $(-1)^{n}\prod_{j=0}^{n-1}(x-j)$, c) $(-1)^{n-1}a_1\prod_{j=1}^{n-1}(x-a_j)$, d) $(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\prod_{j=2}^{n}(x-2j)$, e) $(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}\cdot\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)$.

5.2.30 a), b) determinant se vynásobí $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, c), d), e) nezmění se, f) vynásobí se α^n, g) nezmění se, h) je roven nule, i) je rovne nule pro sudé n, dvojnásobku pro n liché, j) roven číslu komplexně sdruženému. 5.2.31 0. 5.2.32 $D' = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}D = (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}$. 5.2.33 a) $\alpha = 1$ pro n liché, $\alpha = \pm 1$ pro n sudé, b) $\alpha = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. 5.2.35 nula, $n!$. 5.2.36 nula. 5.2.39 pouze pro $n = 1$. 5.2.42 a) $\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}$, je-li $a_i \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{n}$, $\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}a_i$, je-li $a_j = 0$ pro nějaké j, b) $(-1)^{n+1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}$, je-li $a_i \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{n}$, $(-1)^{n+1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}a_i$, je-li $a_j = 0$ pro nějaké j. 5.2.43 a) -110, b) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$, c) 1, d) -3, e) 0, f) $\dfrac{1}{2}(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma))$, g) -138, h) $xyzuv$, i) 1, j) $\dfrac{1}{35}$, k) -100. 5.2.44 nule. 5.2.45 ne, např. $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ splňuje $\det\mathbb{A} = 0$ a $\mathbb{A}^k = \mathbb{A}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. 5.2.47 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha^2 = -\beta\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in T$. 5.2.48 a) 11, b) 49, c) -1, d) 0. 5.2.49 $(-1)^{n-1}$. 5.2.50 $(x+(n-1)y)(x-y)^{n-1}$. 5.2.51 $\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k-x)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x}{a_k-x}\right)$, je-li $x \neq a_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$, $x\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(a_k-x)$, je-li $a_j = x$ pro nějaké j. 5.2.52 $(1-x)^{n-1}$. 5.2.53 $x^n + x^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_k$. 5.2.54 $\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$. 5.2.55 $n!$. 5.2.56 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}n$. 5.2.57 $(-1)^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}b_k$. 5.2.58 $\prod_{k=1}^{n}(1-a_{kk}x)$. 5.2.59 $(n-1)(-1)^{n-1}x^{n-2}$. 5.2.60 $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}}\cdot 2(n-2)!$. 5.2.61 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}(n^n+n^{n-1})$. 5.2.62 $\prod_{k=1}^{n}(a_k-x_k)-\prod_{k=1}^{n}a_k$. 5.2.63 a) 1, b) $(-1)^{n+1}n$, c) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. 5.2.64 0 pro $n > 2$, $(a_1-a_2)(b_2-b_1)$ pro $n = 2$, a_1+b_1 pro $n = 1$. 5.2.65 0 pro $n > 2$, $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ pro $n = 2$, $1+x_1y_1$ pro $n = 1$. 5.2.66 0 pro $n > 2$, $-\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$ pro $n = 2$, $\sin 2\alpha_1$ pro $n = 1$. 5.2.67 0 pro $n > 2$, $\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2)$ pro $n = 2$, $\cos(\alpha_1-\beta_1)$ pro $n = 1$. 5.2.69 a) 256, b) 78400. 5.2.70 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. 5.2.71 viz 5.2.64. 5.2.72 viz 5.2.65. 5.2.73 viz

5.2.66. 5.2.74 viz 5.2.67. 5.2.75 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$. 5.2.76 $\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\substack{j,k=0\\k>j}}^{n}(a_k-a_j)(b_j-b_k)$.

5.2.77 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(a_k-a_j)(b_j-b_k)$. 5.2.78 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)^2$. 5.2.79 $\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)(b_j-b_k)$.

5.2.81 $n+1$. 5.2.82 $\frac{1}{2}(1+(-1)^n)$. 5.2.83 $2^{n+1}-1$. 5.2.84 1. 5.2.85 $9-2^{n+1}$. 5.2.86 $\sum_{k=0}^{n}\beta^k\alpha^{n-k}$.
5.2.87 $\alpha^n+\beta^n$. 5.2.88 $\sum_{k=0}^{n}\alpha^k$. 5.2.89 $\frac{n+1}{x^n}$. 5.2.90 $\sum_{k=0}^{n}x^{2k}$. 5.2.91 $\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$. 5.2.92 $-\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\k\neq j}}^{n}a_j$.

5.2.93 $(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k}$. 5.2.94 $(a^2-b^2)^n$. 5.2.95 $n!$. 5.2.96 1 pro $n=6k$ nebo $n=6k-5$, -1 pro $n=6k-3$ nebo $n=6k-2$, 0 pro $n=6k-4$ nebo $n=6k-1$, $k\in\mathbb{N}$. 5.2.97 0 pro n liché, $(-1)^{n/2}$ pro n sudé. 5.2.98 $\cos n\alpha$. 5.2.99 $\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$. 5.2.100 $n!\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$.
5.2.101 $\frac{x(a-y)^n-y(a-x)^n}{x-y}$ pro $x\neq y$, $(a-x)^{n-1}(a+(n-1)x)$ pro $x=y$. 5.2.102 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$.

5.2.103 $\prod_{k=1}^{n}k!$. 5.2.104 $(-1)^n\prod_{k=1}^{n}k!$. 5.2.105 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$. 5.2.106 $\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k-1}\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$.

5.2.107 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$. 5.2.108 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}a_{k0}\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}\sin\frac{\varphi_j+\varphi_k}{2}\sin\frac{\varphi_j-\varphi_k}{2}$. 5.2.109 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n+1}(a_jb_k-a_kb_j)$. 5.2.110 $\left(2\prod_{j=1}^{n}x_j-\prod_{j=1}^{n}(x_j-1)\right)\cdot\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$. 5.2.111 $\sum_{j=1}^{n}x_j\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$. 5.2.112 $\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}x_j\cdot\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$. 5.2.113 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)\cdot\sum x_{l_1}\cdot\dots\cdot x_{l_{n-k}}$, kde se sčítá přes všechny kombinace $(l_1,\dots,l_{n-k})$ z čísel $1,2,\dots,n$. 5.2.114 1. 5.2.115 1. 5.2.116 $\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2$. 5.2.117 0 pro $n>1$, a_1 pro $n=1$. 5.2.118 $(x-1)^n$. 5.2.119 0 pro $n>2$, $xa^p(a-1)(1-a^2)$ pro $n=2$, a^p-x pro $n=1$. 5.2.120 $\prod_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_j$. 5.2.121 $1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\dots+(-1)^nb_1b_2\dots b_n$. 5.2.122 $(-1)^{n-1}x^{n-2}$.

5.2.123 $(-1)^n((x-1)^n-x^n)$. 5.2.124 $2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1+x\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\right]$. 5.2.125 $\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)\cdot\left[\prod_{j,k=1}^{n}(a_j+b_k)\right]^{-1}$. 5.2.126 $\left(\prod_{k=1}^{n-1}k!\right)^3\cdot\left(\prod_{k=n}^{2n-1}k!\right)^{-1}$. 5.2.127 $n^{n/2}$. 5.2.128 $D\cdot\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(x_k-x_j)$.

5.3 Vlastní čísla a diagonalizace matic a operátorů

5.3.1

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Rozhodněte, zda $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná. Pokud je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, najděte matici $\mathbb{X}$ takovou, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3.2

Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

5.3.3

Zjistěte, zda $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ jsou podobné a v kladném případě nalezněte $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$.

5.3.4

Zjistěte, pro které hodnoty parametru β je diagonalizovatelná matice $\begin{pmatrix} -11 & -8 & 4 \\ 12+\beta & 9+\beta & -3 \\ 2\beta & 2\beta & 3 \end{pmatrix}$.

5.3.5

Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1-\alpha \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3.6

Je dána matice $\mathbb{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

b) Rozhodněte o diagonalizovatelnosti matice $\mathbb{A}$.

c) Najděte bázi $\mathbb{C}^3$ složenou z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$, existuje-li.

5.3.7

Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace.
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

5.3.8

Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory.

5.3.9

Je dána matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte její vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory.

5.3.10

Je matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizovatelná? Pokud ano, najdětě matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$.

5.3.11

Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$.

5.3.12

Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte podobnostní transformaci, tj. najděte regulární matici $\mathbb{X}$ takovou, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$.

5.3.13

Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Pro taková α najděte regulární matici $\mathbb{X}$ a diagonální matici $\mathbb{D}$ tak, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

5.3.14

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Je podobná matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace. Pokud ne, vysvětlete.

5.3.15

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ takové, že $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ záměnou i-tého a j-tého řádku a zároveň i-tého a j-tého sloupce $(i, j \in \widehat{n},\ i \neq j)$. Potom jsou matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ podobné. Dokažte. Nalezněte matici $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{n,n}$ takovou, aby $\mathbb{B} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X}$.

5.3.16

Zjistěte, zda následující matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{3,3}$ jsou podobné:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$,

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$, kde ω je některý z nereálných kořenů rovnice $x^3 = 1$.

Definice

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Operátory A a B jsou vzájemně podobné, právě když existuje regulární operátor $X \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $A = X^{-1}BX$.

5.3.17

Dokažte, že relace podobnosti lineárních operátorů na V (resp. matic z $\mathbb{C}^{n,n}$) je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

5.3.18

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ podobné. Dokažte, že potom:

a) $h(A) = h(B)$,

b) A^n, B^n jsou podobné $(n \in \mathbb{N})$,

c) jsou-li navíc A, B regulární, jsou A^{-1}, B^{-1} podobné.

5.3.19

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V_n)$ podobné. Dokažte, že potom:

a) $\det A = \det B$,

b) $p_A = p_B$.

5.3.20

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ podobné, $C_0 \in \mathcal{L}(V)$ regulární takový, že $B = C_0^{-1} A C_0$, $P = \{C \in \mathcal{L}(V) | B = C^{-1} A C\}$, $Q = \{DC_0 | D \in \mathcal{L}(V), AD = DA\}$. Dokažte, že $P = Q$.

5.3.21

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, nechť alespoň jeden z nich je regulární na V. Potom jsou operátory AB a BA podobné. Dokažte. Zůstane uvedené tvrzení v platnosti, jestliže žádný z operátorů A, B není regulární na V?

5.3.22

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $\alpha \in T$, $A \in \mathcal{L}(V)$, který je podobný operátoru αI. Potom $A = \alpha I$. Dokažte.

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$ a $P \subset\subset V$. Podprostor P nazveme invariantní vzhledem k A, pokud $A(P) \subset P$.

5.3.23

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $P, Q \subset\subset V$ invariantní vzhledem k A. Potom:
a) $P + Q$, b) $P \cap Q$
jsou rovněž invariantní podprostory vzhledem k operátoru A. Dokažte.

5.3.24

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte, že potom platí:

1. $\ker A$ i $A(V)$ jsou invariantní podprostory prostoru V vzhledem k operátoru A,
2. je-li $P \subset\subset V$ invariantní vzhledem k A, je také $A(P)$ invariantní podprostor prostoru V vzhledem k operátoru A.

5.3.25

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ vlastní vektory operátoru A. Potom $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda$ je invariantní podprostor prostoru V vzhledem k operátoru A. Dokažte.

5.3.26

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$ je regulární, $P \subset\subset V$ invariantní vzhledem k A, $\dim P < +\infty$. Potom P je invariantní vzhledem k A^{-1}. Dokažte.

5.3.27

Nalezněte všechny lineární operátory A na prostoru V_n nad tělesem T takové, aby každý podprostor prostoru V_n byl invariantním podprostorem vzhledem k operátoru A.

5.3.28

Uveďte příklad vektorového prostoru V_2 a operátoru $A \in \mathcal{L}(V_2)$ tak, aby jedinými invariantními podprostory prostoru V_2 vzhledem k operátoru A byly $\{\vec{0}\}$ a V_2.

5.3.29

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ je báze prostoru V_2, $A \in \mathcal{L}(V_2)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechny invariantní podprostory prostoru V_2 vzhledem k operátoru A.

5.3.30

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Potom prostor $\mathcal{P}_m$ je invariantním podprostorem prostoru $\mathcal{P}_n$ vzhledem k operátoru derivování D na $\mathcal{P}_n$. Dokažte.

5.3.31

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V_n)$, $p_A = p_B$. Potom $\det A = \det B$. Dokažte.

5.3.32

Nechť A je lineární operátor na komplexním vektorovém prostoru V_n, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Potom:

1. $\displaystyle\prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{\nu_a(\lambda_j)} = \det A$,

2. číslo $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \nu_a(\lambda_j)\lambda_j$ je rovno součtu diagonálních prvků (tím myslíme prvky na hlavní diagonále) v matici ${}^{\mathcal{X}}A$ nezávisle na volbě báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n (tzv. stopa operátoru A, značíme $\mathrm{Tr}(A)$).

Dokažte.

5.3.33

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, označme $h_j = h(A - \lambda_j I)$ pro $j \in \widehat{k}$. Potom má operátor A právě $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(n - h_j)$ lineárně nezávislých vlastních vektorů. Dokažte.

5.3.34

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $A \in \mathcal{L}(V)$. Potom každý nenulový vektor z prostoru V je vlastním vektorem operátoru A, právě když existuje číslo $\alpha \in T$ takové, že $A = \alpha I$. Dokažte.

5.3.35

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad $\mathbb{C}$,
2. $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad $\mathbb{R}$, n liché číslo,
3. $A \in \mathcal{L}(V)$, V nad $\mathbb{C}$, $\dim A(V) < +\infty$.

Potom $\sigma(A) \neq \emptyset$. Dokažte.

5.3.36

Uveďte příklad lineárního operátoru na prostoru konečné kladné dimenze, který nemá žádný vlastní vektor.

5.3.37

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, který má n různých vlastních čísel, $B \in \mathcal{L}(V_n)$, který komutuje s A. Dokažte, že potom:

1. B je diagonalizovatelný,
2. každý vlastní vektor operátoru A je vlastním vektorem operátoru B.

5.3.38

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$. Potom A je monomorfní, právě když $0 \notin \sigma(A)$. Dokažte.

5.3.39

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom A je regulární, právě když $0 \notin \sigma(A)$. Dokažte.

5.3.40

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ regulární, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Dokažte, že potom:

a) $\sigma(A^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda_1}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_k}\right\}$,

b) $\nu_g^A(\lambda_j) = \nu_g^{A^{-1}}\left(\dfrac{1}{\lambda_j}\right)$ pro každé $j \in \widehat{k}$,

c) $\nu_a^A(\lambda_j) = \nu_a^{A^{-1}}\left(\dfrac{1}{\lambda_j}\right)$ pro každé $j \in \widehat{k}$,

d) každý vlastní vektor operátoru A příslušný λ_j je vlastním vektorem operátoru A^{-1} příslušným $\dfrac{1}{\lambda_j}$,

e) operátor A je diagonalizovatelný, právě když je diagonalizovatelný operátor A^{-1}.

5.3.41

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze vektorového prostoru V_3 nad $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(V_3)$. Zjistěte, zda A je diagonalizovatelný operátor. V kladném případě nalezněte diagonální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ operátoru A a určete ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$,

b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

d) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3.42

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze vektorového prostoru V_3 nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(V_3)$. Zjistěte, zda A je diagonalizovatelný operátor. V kladném případě nalezněte diagonální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ operátoru A a určete ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$,

b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -13 & 6 & -12 \\ 4 & -3 & 4 \\ 16 & -8 & 15 \end{pmatrix}$,

c) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$,

d) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 23 & -10 & -8 \\ 33 & -14 & -12 \\ 22 & -10 & -7 \end{pmatrix}$.

5.3.43

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze vektorového prostoru V_3 nad $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(V_3)$. Dokažte, že A je regulární operátor na prostoru V_3, a zjistěte, zda je diagonalizovatelný operátor A^{-1}. V kladném případě nalezněte diagonální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ operátoru A^{-1} a určete ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$, je-li:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 14 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, c) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}$.

5.3.44

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Zjistěte, zda A je diagonalizovatelný operátor. V kladném případě nalezněte diagonální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4)$ operátoru A a určete ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li:

a) ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 5 & -3\\4 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$,

b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & 4 & -2\\2 & -1 & 0 & 1\\2 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$,

c) ${}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\0 & 0 & 2 & -2\\0 & 2 & -2 & 0\\0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$,

d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & -1\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

e) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

f) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\2 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

5.3.45

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2,2})$, $A\mathbb{X} = \mathbb{X}^T$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{2,2}$. Zjistěte, zda A je diagonalizovatelný operátor. V kladném případě nalezněte diagonální bázi operátoru A.

5.3.46

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, $(Ax)(t) = x(\alpha - 2t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, $t \in \mathbb{C}$. Určete všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, při kterých je operátor A diagonalizovatelný, pro tato α nalezněte diagonální bázi $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ operátoru A a sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$.

5.3.47

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2,2})$, ${}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & \alpha\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Určete všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, při kterých je operátor A diagonalizovatelný, pro tato α nalezněte diagonální bázi $\mathcal{Y}$ operátoru A a sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$.

5.3.48

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, při kterých je operátor A diagonalizovatelný, je-li:

a) ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \alpha\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

b) $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

5.3.49

Zjistěte, který z následujících operátorů $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, resp. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ je diagonalizovatelný ($n \geq 2$):

a) $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

b) $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$,

c) $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

e) $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.3.50

Nechť $P, Q \subset\subset V$, $P \neq V$, $Q \neq V$, $P \oplus Q = V$, nechť A_P je projektor na P podle Q.

a) Nalezněte $\sigma(A_P)$.

b) Určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel operátoru A_P, je-li $\dim V \in \mathbb{N}$.

c) Je operátor A_P diagonalizovatelný v případě $\dim V \in \mathbb{N}$?

5.3.51

Nalezněte charakteristický polynom, spektrum a všechny vlastní vektory operátoru derivování $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$. Je operátor D diagonalizovatelný na prostoru $\mathcal{P}_n$?

5.3.52

Nechť V je množina všech reálných funkcí reálné proměnné, které mají vlastní derivace všech řádů v $\mathbb{R}$. Potom:

a) dokažte, že zobrazení D, které každé funkci $f \in V$ přiřazuje její derivaci f', je lineární na prostoru V,

b) dokažte, že $\sigma(D) = \mathbb{R}$, a najděte všechny vlastní vektory.

5.3.53

Nechť V je vektorový prostor všech posloupností komplexních čísel, $A \in \mathcal{L}(V)$, $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) = (0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$. Nalezněte spektrum operátoru A.

5.3.54

Nechť V je množina všech reálných funkcí f reálné proměnné t takových, že existuje $n \in \mathbb{N}$, čísla $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ a platí $f(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Dokažte:

a) V je nad $\mathbb{R}$ vektorovým prostorem (operace jsou definovány obvyklým způsobem, tj. bodově),

b) zobrazení D, které každé funkci $f \in V$ přiřazuje její derivaci f', je lineární operátor na prostoru V,

c) $\sigma(D) = \emptyset$.

5.3.55

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $V \neq \{\vec{0}\}$. Dokažte, že platí:

a) je-li $A^2 = A$, je $\sigma(A) \subset \{0, 1\}$,

b) je-li $A^2 = I$, je $\sigma(A) \subset \{-1, 1\}$,

c) je-li $A^2 = \Theta$, je $\sigma(A) = \{0\}$.

5.3.56

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $A \in \mathcal{L}(V)$, označme

$$\tilde{\sigma}(A) = \{\lambda \in T \mid A - \lambda I \text{ není regulární}\}.$$

Dokažte, že potom:

a) $\sigma(A) \subset \tilde{\sigma}(A)$,

b) $\lambda \in \tilde{\sigma}(A)$, právě když $\lambda \in \sigma(A)$ nebo $(A - \lambda I)V \neq V$,

c) je-li $\dim V < +\infty$, je $\sigma(A) = \tilde{\sigma}(A)$.

5.3.57

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \sigma(A)$, $\vec{x} \in V$ vlastní vektor operátoru A příslušející vlastnímu číslu λ, $f \in \mathcal{P}$. Potom vektor $\vec{x}$ je vlastním vektorem operátoru $f(A)$ (je-li $f(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$, pak $f(A) = \sum_{j=0}^{n} b_j A^j$, kde klademe $A^0 = I$) příslušejícím vlastnímu číslu $f(\lambda)$. Dokažte.

5.3.58

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $f \in \mathcal{P}$. Dokažte, že potom:

a) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$,

b) $\tilde{\sigma}(f(A)) = f(\tilde{\sigma}(A))$ - viz příklad 5.3.56.

5.3.59

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že každý polynom n-tého stupně s koeficientem $(-1)^n$ u nejvyšší mocniny proměnné je charakteristickým polynomem nějakého lineárního operátoru na komplexním vektorovém prostoru V_n.

5.3.60

Použitím Hamiltonovy-Caleyho věty vypočtěte k následujícím regulárním maticím matice inverzní:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

Výsledky

5.3.1 a) Vlastní číslo 1 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 2 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 3 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, je $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. b) Není diagonalizovatelná. Jediné vlastní číslo je 2 s geometrickou násobností 2. LN vlastní vektory k 2 jsou např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 5.3.2 a) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -8$, b) pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. 5.3.3 $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$ pro $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 5.3.4 $\beta \neq -2$. 5.3.5 $\alpha \neq 1$. 5.3.6 a) vlastní číslo 0 s $\nu_a(0) = 1$, s $\nu_g(0) = 1$ a s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní číslo $\frac{2}{3}$ s $\nu_a\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, s $\nu_g\left(\frac{2}{3}\right) = 1$ a s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) matice není diagonalizovatelná, c) neexistuje.

5.3.7 Jsou podobné. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i \\ i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, je $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$. 5.3.8 $\mathbb{A}$ má vlastní číslo

1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, vlastní číslo -1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ a vlastní číslo 2 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Matice $\mathbb{B}$ má vlastní čísla s opačnými znaménky a vlastní vektory stejné. 5.3.9 $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s LN vlastními vektory např. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ a vlastní číslo -1 s LN vlastními vektory např. $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$. 5.3.10 Je diagonalizovatelná. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, je $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 5.3.11 $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 3$. 5.3.12 Jsou podobné. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, je $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$. 5.3.13 Je diagonalizovatelná pro $\alpha \in \mathbb{R}$ s např. $\mathbb{X} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ a s $\mathbb{D} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\alpha\end{pmatrix}$. 5.3.14 $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ a vlastní číslo 0 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Přitom platí $\nu_a(1) = 1$, $\nu_g(1) = 1$ a $\nu_a(0) = 2$, $\nu_g(0) = 1$. Matice $\mathbb{A}$ tedy nemůže být podobná diagonální matici. 5.3.15 $\mathbb{X}$ vznikne z $\mathbb{I}$ záměnou i-tého a j-tého sloupce. 5.3.16 a), b), d) ano, c) ne. 5.3.21 ne, protipříkladem je $A = D$ (operátor derivování) a $B = S$ (operátor integrování). 5.3.27 $A = \alpha I$, $\alpha \in T$. 5.3.28 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. 5.3.29 $\{\vec{0}\}$, $[\vec{x}_1]_\lambda$, $[\vec{x}_2]_\lambda$, V_2. 5.3.36 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. 5.3.41 a) $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 2\vec{x}_3$, $\vec{y}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_3$, $\vec{y}_3 = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, b) $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, $\vec{y}_2 = \vec{x}_1 - \vec{x}_3$, $\vec{y}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, c) není, d) není, e) není. 5.3.42 a) není, b) $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2$, $\vec{y}_2 = 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{y}_3 = -3\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 4\vec{x}_3$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, c) $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 2\vec{x}_3$, $\vec{y}_2 = 3(4-i)\vec{x}_1 + 2(5+3i)\vec{x}_2 + 17\vec{x}_3$, $\vec{y}_3 = 3(4+i)\vec{x}_1 + 2(5-3i)\vec{x}_2 + 17\vec{x}_3$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2+3i&0\\0&0&2-3i\end{pmatrix}$, d) $\vec{y}_1 = 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3$, $\vec{y}_2 = 4\vec{x}_2 - 5\vec{x}_3$, $\vec{y}_3 = 4\vec{x}_1 + 11\vec{x}_3$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 5.3.43 a) $\vec{y}_1 = 3\vec{x}_1 + 5\vec{x}_2 + 4\vec{x}_3$, $\vec{y}_2 = \vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 - 2\vec{x}_3$, $\vec{y}_3 = \vec{x}_2 - \vec{x}_3$,

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, b) není, c) $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2$, $\vec{y}_2 = 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{y}_3 = -3\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 4\vec{x}_3$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3.44 a) není, b) není, c) $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d) $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, f) není. 5.3.45 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. 5.3.46 α libovolná, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 3t - \alpha$, $x_3(t) = 9t^2 - 6\alpha t + \alpha^2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 5.3.47 $\alpha = 0$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 5.3.48 a) $\alpha > 0$, b) $\alpha > 0$, c) α libovolné. 5.3.49 a), b), d) ano na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$, c) ne, e) ano na $\mathbb{C}^n$, na $\mathbb{R}^n$ pouze pro $n = 2$. 5.3.50 a) $\{0, 1\}$, b) $\nu_a(1) = \nu_g(1) = \dim P$, $\nu_a(0) = \nu_g(0) = \dim Q$, c) ano. 5.3.51 $p_D(\lambda) = (-\lambda)^n$, $\sigma(D) = \{0\}$, polynomy nultého stupně, pouze pro $n = 1$. 5.3.52 vlastní podprostor příslušný α je tvaru $P_\alpha = [f]_\lambda$, kde $f(t) = e^{\alpha t}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. 5.3.53 $\emptyset$. 5.3.60 a) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -1 \\ -10 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, d) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 48 & 6 & -8 & -16 \\ -23 & -2 & 4 & 7 \\ 20 & 2 & -4 & -6 \\ -10 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Kapitola 6

Hermitovské a kvadratické formy

6.1.1

Nechť V_3 je komplexní vektorový prostor, $\mathcal{X}$ je báze V_3. Zjistěte, které z následujících zobrazení $h : V_3 \times V_3 \to \mathbb{C}$ je hermitovská forma na prostoru V_3, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$,$(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$:

a) $h(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \cdot \beta_1$,

b) $h(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \cdot \overline{\beta_2} - 2|\alpha_3|^2$,

c) $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2\alpha_1 \cdot \overline{\beta_2} + 2\alpha_2 \cdot \overline{\beta_1} - 3\alpha_3 \cdot \overline{\beta}_3$,

d) $h(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) \cdot \overline{\varphi(\vec{y})}$, kde $\varphi \in V_3^{\#}$,

e) $h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{\varphi(\vec{x})} \cdot \varphi(\vec{y})$, kde $\varphi \in V_3^{\#}$.

6.1.2

Nechť V_3 je reálný vektorový prostor, $\mathcal{X}$ báze prostoru V_3. Zjistěte, které ze zobrazení $h : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$ z příkladu 6.1.1 je hermitovská forma na prostoru V_3 (proužky lze samozřejmě vynechat).

6.1.3

Zjistěte, které z následujících zobrazení $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ je hermitovská forma na prostoru $\mathcal{P}$:

a) $h(x, y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}$,

b) $h(x, y) = x(0)\overline{y(1)} - x(1)\overline{y(0)}$,

c) $h(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$, přičemž $\int_0^1 x(t)y(t)dt = \int_0^1 \mathrm{Re}\ \left(x(t)y(t)\right) dt + \mathrm{i} \int_0^1 \mathrm{Im}\ \left(x(t)y(t)\right) dt$,

d) $h(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$.

6.1.4

Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ taková, že $\mathbb{A}_{ij} = \overline{\mathbb{A}_{ji}}$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$, $\mathcal{X}$ báze prostoru V_n, $h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} \alpha_i \overline{\beta_j} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na prostoru V_n.

Ekvivalentní formulace: Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \ \mathbb{A} \ \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.

6.1.5

Nechť $\varphi \in V^{\#}$, $h(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) \overline{\varphi(\vec{y})}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$. Dokažte, že h je hermitovská forma na prostoru V.

6.1.6

Zjistěte, které z následujících zobrazení $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma na prostoru $\mathbb{R}^3$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 1$,

b) $Q(\vec{x}) = x_1 x_2 - 2 x_2 x_3$,

c) $Q(\vec{x}) = 3 x_3^2 - 2 x_1^2$,

d) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3 x_2^2 - 2 x_1 x_2 + x_2 x_3 - 4 x_1 x_3$,

e) $Q(\vec{x}) = x_2 x_3 - 4 x_1$.

6.1.7

Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ taková, že $\mathbb{A}_{ij} = \overline{\mathbb{A}_{ji}}$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$, $\mathcal{X}$ báze prostoru V_n, $Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} \alpha_i \overline{\alpha_j} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$ pro každé $\vec{x} \in V_n$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Dokažte, že Q je kvadratická forma na prostoru V_n, a nalezněte její poláru.

Ekvivalentní formulace: Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$. Nechť $Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \ \mathbb{A} \ \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}}$. Dokažte, že Q je kvadratická forma, a nalezněte její poláru.

6.1.8

Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Nechť $Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \ \mathbb{A} \ (\vec{x})_{\mathcal{X}}$. Dokažte, že Q je kvadratická forma, a nalezněte její poláru.

6.1.9

Nechť V je reálný vektorový prostor, $\varphi_1, \varphi_2 \in V^{\#}$ a $Q(\vec{x}) = \varphi_1(\vec{x})\varphi_2(\vec{x})$ pro každé $\vec{x} \in V$. Dokažte, že Q je kvadratická forma na prostoru V, a nalezněte její poláru.

6.1.10

Nechť $\mathcal{X}$ je báze reálného vektorového prostoru V_n, Q kvadratická forma na prostoru V_n, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar $Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j$ pro každé $\vec{x} \in V_n$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Je-li Q pozitivně (negativně) definitní, potom $a_{ii} > 0$ ($a_{ii} < 0$) pro každé $i \in \widehat{n}$. Dokažte. Platí též obrácené tvrzení?

6.1.11

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze prostoru V_n, Q kvadratická forma na prostoru V_n. Dokažte, že potom:

a) Q je regulární, právě když $\det {}^{\mathcal{X}}Q \neq 0$,

b) $\det {}^{\mathcal{Y}}Q = |(\det {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})|^2 \cdot \det {}^{\mathcal{X}}Q$.

6.1.12

Pro kvadratické formy Q z příkladu 6.1.6 nalezněte:
a) ${}^{\mathcal{X}}Q$, b) poláru formy Q, c) nulprostor formy Q, d) signaturu Q.

6.1.13

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_2, která má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ prostoru V_2 tvar:

a) $Q(\vec{x}) = -\alpha_2^2$,

b) $Q(\vec{x}) = -\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2$,

c) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$,

d) $Q(\vec{x}) = \alpha_1\alpha_2$,

kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.14

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_3, která má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ prostoru V_3 tvar:

a) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$,

b) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$,

c) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3$,

d) $Q(\vec{x}) = 9\alpha_2^2 + 9\alpha_3^2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 12\alpha_1\alpha_3 - 6\alpha_2\alpha_3$,

e) $Q(\vec{x}) = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2$,

f) $Q(\vec{x}) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3$,

kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.15

Nechť Q je kvadratická forma na prostoru $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ tvar $Q(\vec{x}) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$. Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.16

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_3, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ báze V_3,
${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.17

Nechť h je hermitovská forma na prostoru $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ tvar $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Nalezněte bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, aby v ní měla matice formy h tvar:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.1.18

Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^4$, která pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$:

a) $Q(\vec{x}) = -x_1^2 - x_4^2 + 2x_1x_4 - 4x_1x_3$,

b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - 2x_4^2$,

c) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$,

d) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$.

Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.19

Nechť h je hermitovská forma na reálném prostoru V_4, která má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ prostoru V_4 tvar $h(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_3\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_3$. Nalezněte polární bázi formy h.

6.1.20

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_4, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ báze prostoru V_4, ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.21

Nechť Q je kvadratická forma na prostoru $\mathbb{R}^4$, ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -7 \\ -1 & 3 & -7 & -9 \end{pmatrix}$. Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.22

Nechť Q je kvadratická forma na prostoru $\mathbb{R}^4$, která má ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ tvar $Q(\vec{x}) = x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3^2 + x_4^2$. Nalezněte bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, v níž má matice formy Q tvar $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.1.23

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_4, která má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ prostoru V_4 tvar $Q(\vec{x}) = 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4$. Nalezněte bázi nulprostoru formy Q.

6.1.24

Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ tvar $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3$. Zjistěte, pro která α leží vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ v nulprostoru formy Q.

6.1.25

Nechť Q je kvadratická forma na prostoru $\mathbb{R}^3$, která má v bázi $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ tvar $Q(\vec{x}) = \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$. Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ leží vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ v nulprostoru formy Q.

6.1.26

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ tvar:

a) $Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2\alpha x_2x_3$,

c) $Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,

d) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$,

e) $Q(\vec{x}) = 2x_1x_2 - 4x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 - 3\alpha x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Určete charakter formy Q v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

6.1.27

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_3, která má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ prostoru V_3 tvar $Q(\vec{x}) = \alpha\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha^2\alpha_1\alpha_3$. Určete charakter formy Q v závislosti na parametru α. Nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.28

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_4, která má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ prostoru V_4 tvar $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2$. Určete charakter formy Q v závislosti na parametru α a nalezněte polární bázi formy Q.

6.1.29

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_3, která má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ prostoru V_3 tvar $Q(\vec{x}) = 5\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha\alpha_3^2 + 4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, aby existovala báze V_3, v níž má matice formy Q tvar $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, a nějakou takovou bázi nalezněte.

6.1.30

Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ tvar $Q(\vec{x}) = \alpha x_1^2 - 2x_2^2 + (\alpha+1)x_3^2 - 2\alpha x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3 + 2x_2x_3$. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, aby forma Q měla kladný index setrvačnosti stejný jako záporný.

6.1.31

Nechť Q je kvadratická forma na V_3, která má v bázi $\mathcal{X}$ prostoru V_3 tvar $Q(\vec{x}) = \alpha\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3$. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, aby forma Q byla a) pozitivně definitní, b) singulární.

6.1.32

Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ tvar $Q(\vec{x}) = x_1^2 + (\alpha^2+4\alpha)x_2^2 + (4\alpha+1)x_3^2 - 2\alpha x_1x_2 + 2x_1x_3 - (4\alpha^2+2\alpha-12)x_2x_3$.

a) Určete signaturu formy v závislosti na parametru α.

b) Zjistěte, pro která α je forma Q singulární.

c) Nalezněte všechna α taková, aby existovala báze prostoru $\mathbb{R}^3$, v níž matice formy Q má tvar $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

6.1.33

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_n, $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \neq 0$, $\mathcal{X}$ báze prostoru V_n, $Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j\alpha_i\alpha_j$ pro všechna $\vec{x} \in V_n$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Určete signaturu formy Q.

6.1.34

Nechť Q je kvadratická forma na reálném prostoru V_n. Potom Q se dá rozložit na součin dvou lineárních funkcionálů na prostoru V_n, právě když je splněna jedna z následujících podmínek:

a) hodnost formy Q je menší než 2,

b) hodnost formy Q je dva a indexy setrvačnosti formy Q jsou stejné.

Dokažte.

6.1.35

Nechť V_n je reálný vektorový prostor, $\varphi \in V_n^{\#}$, $\varphi \neq \Theta$. Potom:

a) φ^2 je kvadratická forma na V_n, kde $\varphi^2(\vec{x}) = (\varphi(\vec{x}))^2$,

b) Je-li Q pozitivně definitní kvadratická forma na V_n, pak $\det{}^{\mathcal{X}}(Q+\varphi^2) > \det{}^{\mathcal{X}}Q$ pro každou bázi $\mathcal{X}$ prostoru V_n, kde $(Q+\varphi^2)(\vec{x}) = Q(\vec{x}) + \varphi^2(\vec{x})$. Dokažte.

6.1.36

Nechť V_n je reálný vektorový prostor, M množina všech kvadratických forem na prostoru V_n, definujme na M vektorové operace sčítání a násobení reálným číslem přirozeným způsobem. Dokažte, že množina M s těmito operacemi je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete jeho dimenzi. Rozmyslete si, zda podobné tvrzení platí pro hermitovské formy a zda je opět třeba omezit se na reálné vektorové prostory.

Výsledky

6.1.1 pouze c), d). 6.1.2 pouze a), c), d), e). 6.1.3 pouze a), d). 6.1.6 pouze b), c), d). 6.1.7 $h(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij}\alpha_i\overline{\beta_j}$. 6.1.8 $h(\vec{x},\vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T\ \mathbb{A}\ (\vec{y})_{\mathcal{X}}$. 6.1.9 $h(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(\varphi_1(\vec{x})\varphi_2(\vec{y}) + \varphi_2(\vec{x})\varphi_1(\vec{y}))$.

6.1.10 ne. 6.1.12 Q z b): a) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, c) $[2\vec{x}_1 + \vec{x}_3]_\lambda$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Q z c): a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $3x_3y_3 - 2x_1y_1$, c) $[x_2]_\lambda$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Q z d): a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, b) $x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2$, c) $\{\vec{0}\}$, d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 6.1.13 a) $\mathcal{X}$, b) $(\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2)$, c) $(\vec{x}_1, -2\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$, d) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2)$. 6.1.14 a) $(\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, 5\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3)$, b) $(\vec{x}_1, -2\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, c) $(\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3, 3\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3)$, d) $(\vec{x}_2, \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 - \vec{x}_3)$, e) $(\vec{x}_3, 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)$, f) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2, -\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3)$. 6.1.15 $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

6.1.16 $(\vec{x}_1, 2\vec{x}_1 - \vec{x}_2, 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + 4\vec{x}_3)$. 6.1.17 a) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, b) neexistuje.

6.1.18 a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. 6.1.19 $(\vec{x}_1, \vec{x}_3, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, -\vec{x}_2 + \vec{x}_4)$. 6.1.20 $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_4, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 - \vec{x}_4, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_2 - \vec{x}_3)$. 6.1.21 $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

6.1.22 $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. 6.1.23 $(\vec{x}_2, \vec{x}_3 - 2\vec{x}_4)$. 6.1.24 neexistuje. 6.1.25 pouze pro $\alpha = -\dfrac{5}{2}$. 6.1.26 a) $\alpha > 2$ pozitivně definitní, $\alpha = 2$ pozitivně semidefinitní, $\alpha < 2$ indefinitní, b) indefinitní pro každé α, c) $\alpha \in (3,5)$ pozitivně definitní, $\alpha \in \{3,5\}$ pozitivně semidefinitní, $\alpha \in (-\infty,3) \cup (5,+\infty)$ indefinitní, d) indefinitní pro každé α, e) $\alpha \in \left(-\dfrac{8}{3},2\right)$ negativně definitní, $\alpha \in \left\{-\dfrac{8}{3},2\right\}$ negativně semidefinitní, $\alpha \in (-\infty,-\dfrac{8}{3}) \cup (2,+\infty)$ indefinitní. 6.1.27 $\alpha = 0$ pozitivně i negativně semidefinitní, $\alpha \neq 0$ indefinitní, $(\vec{x}_1+\vec{x}_2, \vec{x}_1-\vec{x}_2, -2\alpha\vec{x}_2+\vec{x}_3)$. 6.1.28 indefinitní pro každé α, $(\vec{x}_1, -\alpha\vec{x}_1+\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$. 6.1.29 pouze $\alpha = 2$, $\dfrac{1}{2}\vec{x}_2, \vec{x}_1 - 2\vec{x}_2, -\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3$. 6.1.30 $\alpha = 0$. 6.1.31 a) neexistuje, b) $\alpha = 0$. 6.1.32 a) $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ pro $\alpha \in (1,3)$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ pro $\alpha \in (-\infty,-3) \cup (-1,1) \cup (3,+\infty)$, $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ pro $\alpha \in \{1,3\}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ pro $\alpha \in (-3,-1)$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ pro $\alpha \in \{-1,-3\}$, b) ± 1, ± 3, c) -1, -3. 6.1.33 $(1,0,n-1)$. 6.1.36 $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Kapitola 7

Vektorové prostory se skalárním součinem

V celé kapitole je těleso reálné nebo komplexní.

7.1 Skalární součin a ortogonalita

7.1.1

Nechť H je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem T. Potom platí:

a) $\langle \alpha\vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$,

b) $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$,

c) $\langle \vec{x} | \alpha\vec{y} + \vec{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$,

d) $\langle \vec{x} | \vec{0} \rangle = \langle \vec{0} | \vec{x} \rangle = 0$

pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in H$ a každé $\alpha \in T$. Dokažte.

7.1.2

Nechť H je prostor se skalárním součinem nad tělesem T. Potom platí:

a) $\|\vec{x}\| \geq 0$, $\|\vec{x}\|$ =0, právě když $\vec{x} = \vec{0}$,

b) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$,

c) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$,

d) $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \dfrac{1}{4}(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$, je-li $T = \mathbb{R}$,

$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \dfrac{1}{4}\left[\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + i(\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - i\vec{y}\|^2)\right]$, je-li $T = \mathbb{C}$,

e) $|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$

pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in H$ a každé $\alpha \in T$. Dokažte.

7.1.3

Nechť H je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in H$ položme:

a) $\{\vec{x}|\vec{y}\} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$,

b) $\{\vec{x}|\vec{y}\} = \langle\vec{y}|\vec{x}\rangle$,

c) $\{\vec{x}|\vec{y}\} = \alpha\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zjistěte, je-li zobrazení $\{\cdot|\cdot\}$ skalární součin na prostoru H.

7.1.4

Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T, $\mathcal{X}$ báze prostoru V_n, $h : V_n \times V_n \to T$, $h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta}_j$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je skalární součin na prostoru V_n.

7.1.5

Nechť H_n je prostor se skalárním součinem nad tělesem T, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze prostoru H_n. Potom existuje právě jedna matice $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in T^{n,n}$ taková, že pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in H_n$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ je $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \overline{\beta_j}$. Dokažte. Čemu je rovno a_{ij}?

7.1.6

Zjistěte, které z následujících zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

a) $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2$,

b) $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 + x_2y_1$,

c) $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$,

d) $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$,

pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

7.1.7

Zjistěte, které z následujících zobrazení $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^3$:

a) $h(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3$,

b) $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$,

c) $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_1 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$,

d) $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 6x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$,

pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

7.1.8

Nechť $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $h(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha x_1 \overline{y_2} + \beta x_2 \overline{y_1} + \gamma x_1 \overline{y_2} + \delta x_2 \overline{y_2}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Nalezněte nutné a postačující podmínky, jaké musí splňovat čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aby byl h skalární součin na prostoru $\mathbb{C}^2$.

7.1.9

Nechť $h : T^{m,n} \times T^{m,n} \to T$, $h(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbb{B} = (b_{ij})$. Dokažte, že h je skalární součin na prostoru $T^{m,n}$.

7.1.10

Zjistěte, které z následujících zobrazení $h : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{C}$ je skalární součin na $\mathcal{P}_3$:

a) $h(x, y) = \displaystyle\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

b) $h(x, y) = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$,

c) $h(x, y) = 2\alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \alpha_0\overline{\beta_1} + \alpha_1\overline{\beta_0}$, $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

7.1.11

Zjistěte, které z následujících zobrazení $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ je skalární součin na $\mathcal{P}$:

a) $h(x, y) = \displaystyle\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

b) $h(x, y) = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$,

c) $h(x, y) = 2\alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \alpha_0\overline{\beta_1} + \alpha_1\overline{\beta_0}$, $x(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j t^j$, $y(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j t^j$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $n \geq 2$.

7.1.12

Nechť $\mathcal{X}$ je báze prostoru H_n se skalárním součinem. Potom $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in H_n$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_j \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, právě když báze $\mathcal{X}$ je ortonormální. Dokažte.

7.1.13

Nechť H je prostor se skalárním součinem nad tělesem T, $(\vec{x}, \vec{y})$ soubor vektorů z prostoru H. Dokažte, že potom:

a) $|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, právě když soubor $(\vec{x}, \vec{y})$ je lineárně závislý,

b) $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$, právě když existuje číslo $\alpha \in T$, $\alpha \geq 0$ takové, že $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ nebo $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.

7.1.14

Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V, jejíž diagonála je pozitivně semidefinitní. Zjistěte, zda pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $|h(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{h(\vec{x}, \vec{x})}\sqrt{h(\vec{y}, \vec{y})}$.

7.1.15

Nechť $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Potom platí $\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2$. Dokažte.

7.1.16

Nechť f, g jsou spojité reálné funkce definované na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt$. Dokažte.

7.1.17

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je lineárně nezávislý soubor vektorů z prostoru se skalárním součinem. Potom gramián (tedy determinant Gramovy matice $\mathbb{G}$ splňující $\mathbb{G}_{ij} = \langle\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle$) tohoto souboru je kladné číslo. Dokažte.

7.1.18

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je soubor vektorů z prostoru H se skalárním součinem nad tělesem T, $i, j \in \widehat{k}$, $i \neq j$, $\alpha \in T$. Jak se změní gramián tohoto souboru, jestliže:

a) v souboru $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ zaměníme vektory $\vec{x}_i$ a $\vec{x}_j$,

b) vektor $\vec{x}_i$ vynásobíme číslem α,

c) k vektoru $\vec{x}_j$ přičteme vektor $\vec{x}_i$?

7.1.19

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je soubor vektorů z prostoru se skalárním součinem, $\mathbb{G}$ Gramova matice tohoto souboru, $k \in \widehat{n}$. Nechť $\det \mathbb{G} \begin{pmatrix} 1, & \cdots, & k \\ 1, & \cdots, & k \end{pmatrix} = 0$. Potom $\det \mathbb{G} = 0$. Dokažte.

7.1.20

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je soubor vektorů z prostoru se skalárním součinem. Potom prvek Gramovy matice tohoto souboru, který má největší absolutní hodnotu, je v této matici na diagonále (je-li jich více, tak alespoň jeden z nich). Dokažte.

7.1.21

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je soubor vektorů z : a) unitárního prostoru, b) eukleidovského prostoru, $(\vec{x}, \vec{z})$ lineárně závislý. Zjistěte, zda musí platit $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \vec{z} = \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle \vec{x}$.

7.1.22

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je soubor vektorů z prostoru se skalárním součinem. Potom je soubor $(\vec{z}, \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle \vec{x} - \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle \vec{y})$ ortogonální. Dokažte.

7.1.23

Soubor vektorů $(\vec{x}, \vec{y})$ z eukleidovského prostoru je ortogonální, právě když $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$. Dokažte. Platí tato ekvivalence i v unitárním prostoru?

7.1.24

Soubor vektorů $(\vec{x}, \vec{y})$ z unitárního prostoru je ortogonální, právě když pro každé $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ platí $\|\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\|^2 = \|\alpha\vec{x}\|^2 + \|\beta\vec{y}\|^2$. Dokažte.

7.1.25

Nechť $(\vec{x}, \vec{y})$ je soubor vektorů z eukleidovského prostoru takový, že $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$. Potom je soubor $(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})$ ortogonální. Dokažte.

7.1.26

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je lineárně nezávislý soubor vektorů z prostoru H se skalárním součinem nad tělesem T, $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k)$, $(\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_k)$ ortogonální soubory nenulových vektorů z prostoru H takové, že pro každé $l \in \widehat{k}$ je $\vec{y}_l, \vec{z}_l \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_l]_\lambda$. Potom existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T$ taková, že pro každé $l \in \widehat{k}$ je $\vec{y}_l = \alpha_l \vec{z}_l$. Dokažte.

7.1.27

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$, $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k)$ jsou soubory vektorů z prostoru se skalárním součinem takové, že $\langle \vec{x}_i | \vec{y}_j \rangle = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \widehat{k}$. Potom jsou oba soubory lineárně nezávislé. Dokažte.

7.1.28

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze prostoru H_n se skalárním součinem. Potom existuje právě jedna báze $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ prostoru H_n taková, že $\langle \vec{x}_i | \vec{y}_j \rangle = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$. Dokažte. Jaká je nutná a postačující podmínka pro to, aby $\vec{x}_j = \vec{y}_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$?

7.1.29

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$, $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l)$ jsou lineárně nezávislé soubory vektorů z prostoru H se skalárním součinem takové, že $\langle \vec{x}_i | \vec{y}_j \rangle = 0$ pro každé $i \in \widehat{k}$, $j \in \widehat{l}$. Určete $\dim\, [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l]_\lambda$.

7.1.30

Nechť $P, Q \subset\subset H_n$ se skalárním součinem, $\dim P < \dim Q$. Potom existuje $\vec{x} \in Q \cap P^\perp$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Dokažte.

7.1.31

Nechť $P, Q \subset\subset H_n$ se skalárním součinem, $P \oplus Q = H_n$. Potom $P^\perp \oplus Q^\perp = H_n$. Dokažte.

7.1.32

Nechť H_n je prostor se skalárním součinem, $P, Q \subset\subset H_n$. Dokažte, že potom platí:

a) $(P + Q)^\perp = P^\perp \cap Q^\perp$,

b) $(P \cap Q)^\perp = P^\perp + Q^\perp$,

c) $P \subset\subset Q$, právě když $Q^\perp \subset\subset P^\perp$,

d) $H_n^\perp = \{\vec{0}\}$, $\{\vec{0}\}^\perp = H_n$.

7.1.33

Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je ortonormální soubor vektorů z prostoru H se skalárním součinem, $\vec{x} \in H$. Potom $\sum_{j=1}^{k} |\langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle|^2 = \|\vec{x}\|^2$, právě když $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda$. Dokažte.

7.1.34

Nalezněte úplný soubor vektorů v prostoru:

a) $\mathbb{C}^2$ se standardním skalárním součinem,

b) $\mathcal{P}_2$ se skalárním součinem $\langle x | y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_2$,

c) $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

d) $P \subset \mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

e) $P \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $P \equiv \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}$,

f) $\mathcal{P}$ se skalárním součinem $\langle x|y\rangle = \displaystyle\int_{-3}^{7} x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}$.

7.1.35

Doplňte na ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem následující soubory vektorů:

a) $$\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right),$$

b) $$\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

c) $$\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

d) $$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

e) $$\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

7.1.36

Najděte ortonormální bázi $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li $\mathbb{R}^4$ eukleidovský.

7.1.37

Najděte ortonormální bázi $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}\right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor z $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.38

Nalezněte ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem, která obsahuje:

a) vektor z $\left[\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

b) dva vektory z $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 4 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.39

Doplňte vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, je-li to možné, na ortogonální bázi prostorů:

a) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

b) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.40

Najděte ortogonální bázi eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahující vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.1.41

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor a $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Najděte

a) ortonormální bázi P,

b) ortogonální průmět vektoru $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ do P, tedy $\vec{a}_P$.

7.1.42

Najděte ortonormální bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor a $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.43

Nechť $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor a $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.
Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P, tj. $\vec{x}_P$.

7.1.44

Doplňte na ortonormální bázi prostoru $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}\right]_\lambda \subset \mathbb{R}^{2,2}$ se skalárním součinem $\langle \mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}$ pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbb{B} = (b_{ij})$, která obsahuje:

a) vektor z $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, b) vektor z $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, c) vektor z $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.45

Nalezněte ortogonální bázi prostoru $P \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $P \equiv 2x - 2y + z = 0$, která obsahuje:

a) vektor z $Q \equiv \; x - y - z = 0$,

b) vektor z $Q \equiv \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}$,

c) vektor z $Q \equiv \begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & - & z & = & 0 \end{array}$.

7.1.46

Nalezněte ortogonální bázi prostoru $\mathcal{P}_3$ se skalárním součinem $\langle x | y \rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$, která obsahuje vektory z $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$.

7.1.47

Nechť H je reálný prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ (operace jsou definovány obvyklým způsobem) se skalárním součinem $\langle f|g \rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)dt$ pro každé $f, g \in H$, $f_k(t) = \cos kt$ pro každé $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $k \in \mathbb{N}_0$, $g_k(t) = \sin kt$ pro každé $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $k \in \mathbb{N}$. Potom:

a) $\langle f_j | f_k \rangle = 0$ pro každé $j, k \in \mathbb{N}_0$, $j \neq k$,

b) $\langle g_j | g_k \rangle = 0$ pro každé $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$.

Dokažte. Určete $\|f_j\|$, $\|g_k\|$, $j \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$.

7.1.48

Nechť H je reálný prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ (operace jsou definovány obvyklým způsobem) se skalárním součinem $\langle f|g \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^\pi f(t)g(t)dt$ pro každé $f, g \in H$, $f_k(t) = \cos kt$ pro každé $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $k \in \mathbb{N}_0$, $g_k(t) = \sin kt$ pro každé $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $k \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je soubor $(f_0, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ ortogonální bází svého lineárního obalu. Dokažte. Určete $\|f_j\|$, $\|g_k\|$, $j \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$.

7.1.49

Nechť H je reálný prostor reálných polynomů se skalárním součinem $\langle x|y \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x(t) - y(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt$ pro každé $x, y \in H$, $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$ pro každé $t \in \langle -1, 1 \rangle$, $k \in \mathbb{N}_0$. Potom:

a) T_k je reálný polynom k-tého stupně v proměnné t pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ (tzv. Čebyševův polynom),

b) $\langle T_j | T_k \rangle = 0$ pro každé $j, k \in \mathbb{N}_0$, $j \neq k$.

Dokažte. Určete $\|T_k\|$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

7.1.50

Nechť H je reálný prostor reálných polynomů se skalárním součinem $\langle x|y \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 (x(t) - y(t))dt$ pro každé $x, y \in H$, $X_k(t) = \dfrac{1}{2^k k!} \dfrac{d^k}{dt^k} [t^2 - 1]^k$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Potom:

a) X_k je reálný polynom k-tého stupně v proměnné t pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ (tzv. Legendreův polynom),

b) $\langle X_j | X_k \rangle = 0$ pro každé $j, k \in \mathbb{N}_0$, $j \neq k$.

Dokažte. Určete $\|X_k\|$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

7.1.51

Nechť $P \subset \mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Nalezněte bázi $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$, je-li:

a) $P = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

b) $P = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

c) $P = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

d) $P = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

e) $P \equiv \begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & z & - & u & = & 0 \\ 3x & & & - & 2z & - & 11u & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & - & 28u & = & 0 \end{array}$,

f) $P \equiv \; y - z = 0$.

7.1.52

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Najděte $P^\perp$, je-li:

$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.53

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Najděte $P^\perp$, je-li:

$P = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.54

Nalezněte bázi $\mathcal{P}_3^\perp$ do $\mathcal{P}_4$ se skalárním součinem $\langle x|y\rangle = \displaystyle\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_4$.

7.1.55

Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 6u_3v_3 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_3 + u_3v_2$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Nalezněte ortogonální bázi $P^\perp$ do $\mathbb{R}^3$, je-li:

a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

b) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

c) $P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

d) $P \equiv x = 0$,

e) $P \equiv \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}$.

7.1.56

Nechť $P, Q \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Nalezněte ortonormální bázi $P^\perp$ do $\mathbb{R}^3$ obsahující vektor z Q, je-li:

a) $P \equiv x - y = 0$, $Q \equiv x - z = 0$,

b) $P \equiv x + 2y + 3z = 0$, $Q \equiv 2x - y = 0$,

c) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

7.1.57

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, je-li:

$Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

7.1.58

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor, $Q = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Najděte bázi $Q^\perp$ do P, tj. bázi ortogonálního doplňku Q do P.

7.1.59

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, je-li:

$$Q = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda, \ P = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

7.1.60

Nechť je dán vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$ a $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor, $P = \left\{ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \middle| \, a_2 - a_3 = 0 \right\}$.
Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P.

7.1.61

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor, $\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$

a $Q = \left\{ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \middle| \, a_1 - a_3 = 0 \wedge a_2 - a_4 = 0 \right\}$. Najděte

a) $Q_P^\perp$ do P (nikoli do $\mathbb{R}^4$),

b) ortogonální průmět vektoru $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ do $Q_P^\perp$, tj. $\vec{x}_{Q_P^\perp}$.

7.1.62

Najděte ortonormální bázi $P = []_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$ nejprve pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu a pak ještě jiným způsobem.

7.1.63

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor, $P = \left\{ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \middle| \, a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$. Najděte

a) $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$,

b) ortonormální bázi P,

c) ortogonální průmět $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ do P pomocí nalezené ortonormální báze.

7.1.64

Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Najděte

a) $P^\perp$ do $\mathbb{C}^4$,

b) ortogonální průmět $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

7.1.65

Nechť $P, Q \subset \mathbb{R}^{2,2}$ se skalárním součinem $\langle \mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}$ pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbb{B} = (b_{ij})$. Nalezněte bázi $Q^\perp$ do P, je-li:

a) $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

b) $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

c) $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

d) $Q = \left[\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

e) $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

7.1.66

Nechť $P, Q \subset \mathcal{P}$ se skalárním součinem $\langle x | y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$, $P = [x_1]_\lambda$, $Q = [y_1, y_2, y_3]_\lambda$. Nalezněte ortogonální bázi $P^\perp$ do Q, je-li:

a) $x_1(t) = 1 + t^2$, $y_1(t) = 1 + t + t^2$, $y_2(t) = 2t$, $y_3(t) = 2 - t + 2t^2$, pro každé $t \in \mathbb{C}$,

b) $x_1(t) = 1$, $y_1(t) = 1 - t^3$, $y_2(t) = t^3$, $y_3(t) = t + t^2$, pro každé $t \in \mathbb{C}$.

7.1.67

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$. Nalezněte vektory $\vec{y} \in P$, $\vec{z} \in P^\perp$ takové, že $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, je-li:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$, $P = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

7.1.68

Najděte ortogonální doplněk k $P = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li

a) $\mathbb{R}^4$ vybaven standardním skalárním součinem,

b) $\mathbb{R}^4$ vybaven skalárním součinem h takovým, že ${}^{\mathcal{E}}h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.1.69

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$,

$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

Najděte $P^\perp$, pokud

a) $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský,

b) $\mathbb{R}^4$ vybaven skalárním součinem h takovým, že ${}^{\mathcal{E}}h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.1.70

Najděte ON bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, pokud

a) $\mathbb{R}^4$ eukleidovský,

b) v $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin h splňující ${}^{\mathcal{E}}h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.1.71

Nechť $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P, tj. $\vec{x}_P$, pokud

a) $\mathbb{R}^4$ je vybaven standardním skalárním součinem,

b) v $\mathbb{R}^4$ je definován skalárním součin $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

7.1.72

Nechť je dán vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \mid \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \}$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P,

a) pokud $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský,

b) pokud je v $\mathbb{R}^4$ definován skalární součin $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_2 + x_2y_1$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

7.1.73

Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$, $P = \left[\begin{pmatrix}1\\i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. Následující úlohu řešte nejprve při standardním skalárním součinu a poté při skalárním součinu h s maticí ve standardní bázi ${}^{\mathcal{E}}h = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Najděte

a) $P^\perp$ do $\mathbb{C}^4$,

b) ortogonální průmět $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ do P.

Výsledky

7.1.3 a) ne, b) ano, c) pouze pro $\alpha > 0$. 7.1.5 $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle$. 7.1.6 a), b), c) ne, d) ano. 7.1.7 a), d) ano, b), c) ne. 7.1.8 $\alpha > 0 \wedge \delta > 0 \wedge \beta = \overline{\gamma} \wedge \alpha\delta > |\gamma^2|$. 7.1.10 a), b), c) ano. 7.1.11 a) ano, b), c) ne. 7.1.14 ano. 7.1.18 a), c) nezmění se, b) vynásobí se číslem $|\alpha|^2$. 7.1.21 a) ne, b) ano. 7.1.23 ne. 7.1.28 $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ ortonormální báze. 7.1.29 $k+l$. 7.1.34 a) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, b) (x_1, x_2), $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \sqrt{3}(1-2t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, c) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$, d) $\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4035}}\begin{pmatrix}29\\43\\16\\-33\end{pmatrix}\right)$, e) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, f) neexistuje. 7.1.35 a) $\vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \frac{1}{3\sqrt{26}}\begin{pmatrix}5\\-13\\6\\2\end{pmatrix}$, b) $\vec{x}_4 = \frac{1}{5\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\12\end{pmatrix}$, c) $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix}$, d) nelze, e) $\vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$. 7.1.36 např. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right)$. 7.1.37 např. $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\14\\-1\\18\end{pmatrix}\right)$. 7.1.38 a) $\left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix}i\\3i\\\sqrt{6}\end{pmatrix}, \frac{1}{4\sqrt{15}}\begin{pmatrix}15\\-3\\i\sqrt{6}\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}0\\-2i\\\sqrt{6}\end{pmatrix}\right)$, b) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-i\end{pmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\-2-12i\\24+i\end{pmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-10\\4-i\\2-2i\end{pmatrix}\right)$.

7.1.39 a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \notin Q$. 7.1.40 $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$. 7.1.41 a) např. báze $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$, b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4\\-4\\13\\-3\end{pmatrix}$. 7.1.42 např. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

7.1.43 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

7.1.44 a) $\left(\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8&14\\-1&18\end{pmatrix}\right)$, b) neexistuje, $\left(\begin{pmatrix}-5&1\\7&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}63&71\\41&-43\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6&43\\-17&46\end{pmatrix}\right)$.

7.1.45 a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$, b) neexistuje, c) $\left(\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\8\\6\end{pmatrix}\right)$. 7.1.46 (e_1, e_2, e_1-3e_3). 7.1.47 $\|f_0\| = \sqrt{\pi}$, $\|f_j\| = \|g_j\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pro $j \in \mathbb{N}$. 7.1.48 $\|f_0\| = \sqrt{2\pi}$, $\|f_j\| = \|g_j\| = \sqrt{\pi}$ pro $j \in \mathbb{N}$. 7.1.49 $\|T_k\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pro $k \in \mathbb{N}$, $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.

7.1.50 $\sqrt{\frac{2}{2k+1}}$. 7.1.51 a) $\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}17\\10\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, b) $\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, c) $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, d) neexistuje, e) $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$, f) $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$. 7.1.52 $\left[\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 7.1.53 $\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.54 $(e_1 - 12e_2 + 30e_3 - 20e_4)$. 7.1.55 a) $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right)$, b) $\left(\begin{pmatrix}14\\21\\-6\end{pmatrix}\right)$, c) $\left(\begin{pmatrix}31\\46\\-14\end{pmatrix}\right)$, d) $\left(\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}\right)$, e) $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}19\\27\\-8\end{pmatrix}\right)$. 7.1.56 a) $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, b) neexistuje, c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{145}}\begin{pmatrix}16\\13\\-10\end{pmatrix}\right)$. 7.1.57 $\left[\begin{pmatrix}2\\7\\5\\9\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 7.1.58 např. $\left(\begin{pmatrix}4\\1\\-5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. 7.1.59 např. $\left(\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\5\\5\\5\end{pmatrix}\right)$. 7.1.60 $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$. 7.1.61 a) $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$.

7.1.62 např. $\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\\3\end{pmatrix}\right)$. 7.1.63 a) $P^\perp = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, b) $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$,

c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-7\\2\\-3\end{pmatrix}$. 7.1.64 a) $\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3+i\\3-i\\0\end{pmatrix}$. 7.1.65 a) úloha nemá smysl, b) $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}\right)$, c) $\left(\begin{pmatrix}8&-13\\-13&4\end{pmatrix}\right)$, d) $\left(\begin{pmatrix}2&7\\5&9\end{pmatrix}\right)$, e) neexistuje. 7.1.66 a) $(45e_1 - 112e_2 + 45e_3)$, b) $(e_1 - 4e_4, 46e_1 - 135e_2 - 135e_3 + 266e_4)$. 7.1.67 a) $\vec{y} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\\2\end{pmatrix}$, b) $\vec{y} = \vec{0}$, $\vec{z} = \vec{x}$, c) $\vec{y} = \vec{x}$, $\vec{z} = \vec{0}$, d) $\vec{y} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\5\\5\\-13\end{pmatrix}$, $\vec{z} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}9\\-5\\-1\\-3\end{pmatrix}$, e) $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

7.1.68 a) $\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, b) $\left[\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-3\\2\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$. 7.1.69 a) $\left[\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, b) $\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

7.1.70 a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$, b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$. 7.1.71 a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

7.1.72 a) $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\1\\6\end{pmatrix}$. 7.1.73 a) $\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3+i\\3-i\\0\end{pmatrix}$, b) $\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-2i\\-1+i\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2-i\\5+i\\4-i\\0\end{pmatrix}$.

7.2 Lineární funkcionály na prostorech se skalárním součinem

7.2.1

Nechť φ je lineární funkcionál na prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem. Nalezněte vektor $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$ takový, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ je $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$, je-li pro všechna $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$:

a) $\varphi(\vec{x}) = x_2$,

b) $\varphi(\vec{x}) = 2x_1 - 3x_3$,

c) $\varphi(\vec{x}) = 2x_1 + ix_2 - 4x_3$.

7.2.2

Nechť φ je lineární funkcionál na prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte vektor $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$ takový, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ je $\varphi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\vec{z}\rangle$, je-li:

a) $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7.2.3

Nechť φ je lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{P}_2$ se skalárním součinem $\langle x|y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_2$. Nalezněte vektor $z \in \mathcal{P}_2$ takový, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_2$ je $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$, je-li pro každé $x \in \mathcal{P}_2$:

a) $\varphi(x) = x\left(\frac{1}{2}\right)$,

b) $\varphi(x) = x(1) - x(0)$,

c) $\varphi(x) = x(i)$.

7.2.4

Nechť φ je lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{P}_2$ se skalárním součinem $\langle x|y\rangle = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)}$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_2$. Nalezněte vektor $z \in \mathcal{P}_2$ takový, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_2$ je $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$, je-li pro každé $x \in \mathcal{P}_2$:

a) $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}$,

b) $\varphi(x) = x(0) + x(2)$.

7.2.5

Nechť φ je lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{P}_3$ se skalárním součinem $\langle x|y\rangle = \int_{0}^{1} x(t)\overline{y(t)}$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$. Nalezněte vektor $z \in \mathcal{P}_3$ takový, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_3$ je $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$, je-li pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$:

a) $\varphi(x) = \alpha_0 + 2\alpha_1 - \alpha_2$,

b) $\varphi(x) = \frac{1}{3}\alpha_0 + \frac{1}{6}i\alpha_1$.

7.2.6

Nechť φ je lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{P}_3$ se skalárním součinem $\langle x|y\rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + 2\alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \alpha_0\overline{\beta_1} + \alpha_1\overline{\beta_0}$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$, $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $\varphi(x) = ix(-i)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$. Nalezněte vektor $z \in \mathcal{P}_3$ takový, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_3$ je $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$.

7.2.7

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ortonormální báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{H}_n^*$.Nalezněte vektor $z \in \mathcal{H}_n$ takový, že pro všechna $x \in U_n$ je $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$, je-li pro každé $\vec{x} \in U_n$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$:

a) $\varphi(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2-j)\alpha_j$,

b) $\varphi(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2-i)\alpha_j$.

7.2.8

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\vec{x}_0 \in \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\varphi \in \mathcal{H}^{\#}$, $\varphi(\vec{x}) = \overline{\langle \vec{x}_0|A\vec{x}\rangle}$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Nalezněte vektor $\vec{z} \in \mathcal{H}$ takový, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{H}$ je $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\vec{z}\rangle$.

7.2.9

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem nad tělesem T, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}^{\#}$, $\alpha \in T$, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{H}$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{H}$ je $\varphi_1(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\vec{y}_1\rangle$, $\varphi_2(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\vec{y}_2\rangle$. Nalezněte vektor $\vec{z} \in \mathcal{H}$ takový, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{H}$ je $(\alpha\varphi_1 + \varphi_2)(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\vec{z}\rangle$.

Výsledky

7.2.1 a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -4 \end{pmatrix}$. 7.2.2 a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. 7.2.3 a) $\frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{4}e_2$, b) $\frac{3}{2}e_2$, c) $\frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}ie_2$. 7.2.4 a) $(-3-i)e_1 + (6+i)e_2$, b) $2e_2$. 7.2.5 a) $3(-31e_1 + 176e_2 - 170e_3)$, b) $3(1+2i)e_1 - 4(3+8i)e_2 + 10(1+3i)e_3$. 7.2.6 $(-1-2i)e_1 + (1+i)e_2 + ie_3$. 7.2.7 a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2-j)\vec{x}_j$, b) $(2+i)\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\vec{x}_j$. 7.2.8 $A^*\vec{x}_0$. 7.2.9 $\overline{\alpha}\vec{y}_1 + \vec{y}_2$.

7.3 Lineární operátory a matice na prostorech se skalárním součinem

7.3.1

Je dána matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nejprve uveďte, co vše o jejích vlastních číslech, vlastních vektorech a diagonalizovatelnosti víme z teorie. Poté najděte její vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

7.3.2

Najděte OG bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahující vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- nejprve při použití standardního skalárního součinu,
- poté při použití skalárního součinu h, pro který platí ${}^{\mathbb{E}}h = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3.3

Je matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) hermitovská,

b) unitární,

c) pozitivně definitní?

Co vše umíte říci bez počítání o jejích vlastních číslech, vl. vektorech a diagonalizaci? Poté vlastní čísla spočtěte a najděte k nim příslušné LN vlastní vektory.

7.3.4

Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Je matice $\mathbb{A}$

a) normální,

b) hermitovská,

c) pozitivně definitní?

Pokud jste nějakou vlastnost zaškrtli, napište, co z ní vyplývá bez počítání pro spektrum $\sigma(\mathbb{A})$ a diagonalizovatelnost $\mathbb{A}$. Poté najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

7.3.5

Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) hermitovská?

b) symetrická?

V případě b) (tedy symetrické matice) napište, co víte o vlastních číslech a diagonalizaci bez počítání. Poté najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

7.3.6

Pro tu z následujících matic, která je hermitovská a není symetrická, uveďte, co vše víte o jejích vlastních číslech, vlastních vektorech a diagonalizaci bez počítání. Poté najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory. $\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3.7

Nechť $\mathcal{H}_n$ je prostor se skalárním součinem nad tělesem T, $h : \mathcal{L}(\mathcal{H}_n) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}_n) \to T$, $h(A, B) = \operatorname{tr}(AB^*)$. Dokažte, že h je skalární součin na prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.

7.3.8

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^2$ se standardním skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{X}}(A^*)$.

7.3.9

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{E}}\!A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}(A^*)$.

7.3.10

Nechť $\mathcal{X}$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in E_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$,

${}^{\mathcal{E}}\!A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}(A^*)$.

7.3.11

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze eukleidovského prostoru $\mathcal{H}_3$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$, $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je báze $\mathcal{H}_3$. Nalezněte ${}^{\mathcal{Y}}(A^*)$, je-li:

a) ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

b) ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.3.12

Nechť $P, Q \subset \mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem $P \equiv \; x - y = 0$, $Q \equiv \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$, A je projektor na P podle Q. Nalezněte ${}^{\mathcal{X}}(A^*)$, je-li $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

7.3.13

Nechť D je operátor derivování na prostoru $\mathcal{P}_2$ se skalárním součinem $\langle x|y \rangle = 3 \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_2$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}(D^*)$.

7.3.14

Nechť D je operátor derivování na prostoru $\mathcal{P}_3$ se skalárním součinem $\langle x|y \rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2}$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$, $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ báze $\mathcal{P}_3$, $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$, $x_2(t) = t^2 - 1$, $x_3(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2$. Nalezněte ${}^{\mathcal{X}}(D^*)$.

7.3.15

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ takové, že $\sum_{j=1}^{k} A_j^* A_j = \Theta$. Potom $A_j = \Theta$ pro každé $j \in \widehat{k}$. Dokažte.

7.3.16

Nechť $\mathcal{H}_n$ je prostor se skalárním součinem, $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ takové, že $A^*A = B^*B - BB^*$. Potom $A = \Theta$. Dokažte.

7.3.17

Nechť $P, Q \subset\subset \mathcal{H}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $P \oplus Q = \mathcal{H}$, A projektor na P podle Q. Potom A^* je projektor na $Q^\perp$ podle $P^\perp$. Dokažte.

7.3.18

Nechť $\mathcal{H}_n$ je prostor se skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $P \subset\subset \mathcal{H}_n$ invariantní vzhledem k A. Potom $P^\perp$ je invariantní vzhledem k operátoru A^*. Dokažte.

7.3.19

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Nechť $\vec{x}_0 \in \mathcal{H}$ je vlastní vektor operátoru A příslušející vlastnímu číslu λ_1 a současně vlastní vektor operátoru A^* příslušející vlastnímu číslu λ_2. Potom $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Dokažte.

7.3.20

Nechť $\mathcal{H}_n$ je prostor se skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Potom $\sigma(A^*) = \left\{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_k}\right\}$. Dokažte.

7.3.21

Nechť $\mathcal{H}_n$ je prostor se skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Potom $\det A^* = \overline{\det A}$. Dokažte. Zformulujte analogické tvrzení pro matici sdruženou k matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

7.3.22

Nechť A je symetrický operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom αA je také hermitovský operátor na prostoru $\mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.23

Nechť A je hermitovský operátor na unitárním prostoru U_n. Potom:

a) $\det A \in \mathbb{R}$,

b) $\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$,

c) je-li $A \neq \Theta$, $\alpha \in \mathbb{C}$, je operátor αA hermitovský, právě když $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokažte.

7.3.24

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ prostor nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom operátory AA^*, A^*A jsou hermitovské. Dokažte.

7.3.25

Nechť A, B jsou hermitovské operátory na prostoru se skalárním součinem $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom:

a) $A + B$ je hermitovský operátor na prostoru $\mathcal{H}$,

b) $AB + BA$ je hermitovský operátor na prostoru $\mathcal{H}$,

c) AB je hermitovský operátor na prostoru $\mathcal{H}$, právě když operátory A, B komutují,

d) je-li navíc A regulární na prostoru $\mathcal{H}$, je A^{-1} rovněž hermitovský operátor na prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažte.

7.3.26

Nechť A, B jsou hermitovské operátory na vektorovém prostoru $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom operátor $i(AB - BA)$ je rovněž hermitovský na prostoru $\mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.27

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ takový, že $\langle A\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle = \langle \vec{x}_i|A\vec{x}_j\rangle$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$, $i \neq j$. Potom je A symetrický na $\mathcal{H}_n$. Dokažte. Ukažte, že uvedená podmínka nestačí k tomu, aby operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, který ji splňuje, byl hermitovský na $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$.

7.3.28

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ takový, že $\langle A\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle = \langle \vec{x}_i|A\vec{x}_j\rangle$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$. Potom je A hermitovský na $\mathcal{H}_n$. Dokažte.

7.3.29

Nechť $P, Q \subset\subset \mathcal{H}$ se skalárním součinem, nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $P \oplus Q = \mathcal{H}$, A projektor na P podle Q. Potom A je hermitovský operátor na prostoru $\mathcal{H}$, právě když $P^{\perp} = Q$. Dokažte.

7.3.30

Nechť M je množina všech symetrických operátorů na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Dokažte, že $M \subset\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a určete $\dim M$.

7.3.31

Nechť M je množina všech hermitovských operátorů na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Dokažte, že $M \subset\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete $\dim M$.

7.3.32

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze prostoru $\mathcal{H}_n$ se skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ kosý (A je kosý, právě když $A^* = -A$). Potom matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je kosá. Dokažte.

7.3.33

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze prostoru $\mathcal{H}_n$ se skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, matice ${}^{\mathcal{X}}A$ kosá. Potom je operátor A kosý. Dokažte.

7.3.34

Nechť A je kosohermitovský operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Potom je λ_0 ryze imaginární číslo. Dokažte.

7.3.35

Nechť A je kososymetrický operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Potom $\sigma(A) = \emptyset$ nebo $\sigma(A) = \{0\}$. Dokažte.

7.3.36

Nechť A je kososymetrický operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom αA je také kososymetrický operátor na prostoru $\mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.37

Nechť A je kososymetrický operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Potom:

a) $h(A)$ je sudé číslo,

b) $\det A = 0$, je-li n liché,

c) $\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.

Dokažte.

7.3.38

Nechť A je kosohermitovský operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Potom:

a) $\det A \in \mathbb{R}$, pokud je n sudé číslo,

b) $\det A$ je ryze imaginární číslo, je-li n liché,

c) číslo $\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle = 0$ je ryze imaginární pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$,

d) je-li $A \neq \Theta$, $\alpha \in \mathbb{C}$, je operátor αA kosohermitovský, právě když $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokažte.

7.3.39

Nechť A, B jsou kosé operátory na prostoru se skalárním součinem $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom:

a) $A + B$ je kosý operátor na prostoru $\mathcal{H}$,

b) AB je hermitovský operátor na prostoru $\mathcal{H}$, právě když operátory A, B komutují,

c) AB je kosý operátor na prostoru $\mathcal{H}$, právě když $AB + BA = \Theta$,

d) je-li navíc A regulární na prostoru $\mathcal{H}$, je A^{-1} rovněž kosý operátor na prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažte.

7.3.40

Nechť A je hermitovský nebo kosý operátor na prostoru se skalárním součinem $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $P \subset\subset \mathcal{H}$ invariantní vzhledem k A. Potom $P^{\perp}$ je rovněž invariantní vzhledem k operátoru A. Dokažte.

7.3.41

Nechť A je hermitovský nebo kosý operátor na prostoru se skalárním součinem $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\vec{x} \in \mathcal{H}$ takový, že $A^2\vec{x} = \vec{0}$. Potom $A\vec{x} = \vec{0}$. Dokažte.

7.3.42

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze prostoru $\mathcal{H}_n$ se skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ takový, že $\langle A\vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = -\langle \vec{x}_i | A\vec{x}_j \rangle$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$. Potom A je kosý na $\mathcal{H}_n$ (A je kosý, právě když $A^* = -A$). Dokažte.

7.3.43

Nechť M je množina všech kososymetrických operátorů na prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Dokažte, že $M \subset\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete $\dim M$.

7.3.44

Nechť M je množina všech kososymetrických operátorů na prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Dokažte, že $M \subset\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete $\dim M$.

7.3.45

Nechť A je kososymetrický operátor na prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Potom A je diagonalizovatelný, právě když $A = \Theta$. Dokažte.

7.3.46

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom $\mathbb{A}$ je unitární, právě když je splněna některá z následujících podmínek:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a_{kj}} = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{jk}} = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$.

Je-li splněna jedna z podmínek, platí i druhá. Dokažte.

7.3.47

Nechť A je unitární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem nad tělesem $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\alpha \in T$. Potom operátor αA je unitární, právě když $|\alpha| = 1$. Dokažte.

7.3.48

Nechť A, B jsou unitární operátory na prostoru $\mathcal{H}_n$ se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$. Potom:

a) AB je unitární operátor na prostoru $\mathcal{H}_n$,

b) $|\det A| = 1$,

c) A^{-1} je unitární operátor na prostoru $\mathcal{H}_n$.

Dokažte.

7.3.49

Nechť A je unitární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $P \subset\subset \mathcal{H}$ invariantní vzhledem k A. Potom $P^{\perp}$ je rovněž invariantní vzhledem k A. Dokažte.

7.3.50

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ takový, že $\langle A\vec{x}_i | A\vec{x}_j \rangle = \langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$, $i \neq j$. Potom je A unitární operátor na $\mathcal{H}_n$. Dokažte.

7.3.51

Nechť A je unitární operátor na prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\mathcal{X}$ ortonormální báze prostoru $\mathcal{H}_n$, nechť matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je trojúhelníková. Potom ${}^{\mathcal{X}}$ je diagonální. Dokažte.

7.3.52

Nechť $P, Q \subset\subset \mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $P \oplus Q = \mathcal{H}$, A projektor na P podle Q. Potom A je unitární operátor, právě když $P = \mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.53

Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby diagonální matice byla unitární.

7.3.54

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Dokažte, že když A má dvě ze tří následujících vlastností: 1. je hermitovský, 2. je unitární, 3. $A^2 = I$, potom má i vlastnost třetí.

7.3.55

Nechť A je kosý operátor na prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom:

a) operátor $A - I$ je regulární na prostoru $\mathcal{H}$,

b) operátor $B = (A + I)(A - I)^{-1}$ je unitární na prostoru $\mathcal{H}$,

c) operátor $B - I$ je regulární na prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažte.

7.3.56

Nechť B je unitární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $B - I$ je regulární na prostoru $\mathcal{H}$. Potom je operátor $(B + I)(B - I)^{-1}$ je kosý na prostoru $\mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.57

Nechť A je hermitovský operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, dim $\mathcal{H} < +\infty$. Potom:

a) operátor $A - iI$ je regulární na prostoru $\mathcal{H}$,

b) operátor $B = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ je unitární na prostoru $\mathcal{H}$,

c) operátor $B - I$ je regulární na prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažte.

7.3.58

Každý hermitovský, kosý nebo unitární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem konečné dimenze je normální na prostoru $\mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.59

Nechť A je normální operátor na prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem nad tělesem T, dim $\mathcal{H} < +\infty$, $\alpha \in T$. Potom:

a) operátor αA je normální na prostoru $\mathcal{H}$,

b) je-li navíc A regulární na prostoru $\mathcal{H}$, je operátor A^{-1} rovněž normální na prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažte.

7.3.60

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem nad tělesem T, dim $\mathcal{H} < +\infty$, $\alpha, \beta \in T$, $|\alpha| = |\beta|$. Potom operátor $\alpha A + \beta A^*$ je normální na prostoru $\mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.61

Nechť A je normální operátor na prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem, dim $\mathcal{H} < +\infty$, $\lambda \in \sigma(A)$, $P = \{\vec{x} \in \mathcal{H} | A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$. Potom $P^{\perp}$ je invariantní vzhledem k A. Dokažte.

7.3.62

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem, dim $\mathcal{H} = 1$. Potom A je normální operátor na prostoru $\mathcal{H}$. Dokažte.

7.3.63

Nechť A je normální operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Existuje vždy diagonální báze operátoru A, která není ortogonální?

7.3.64

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, A diagonalizovatelný. Potom lze na V_n definovat skalární součin h tak, že A je normální operátor na prostoru V_n se skalárním součinem h. Dokažte.

7.3.65

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom:

a) existuje právě jedna dvojice operátorů $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ taková, že A_1 je hermitovský, A_2 kosý na prostoru $\mathcal{H}$ a platí $A = A_1 + A_2$,

b) A je normální na prostoru $\mathcal{H}$, právě když operátory A_1, A_2 komutují.

Dokažte.

7.3.66

Nechť A je lineární operátor na unitárním prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom:

a) existuje právě jedna dvojice hermitovských operátorů $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ taková, že $A = A_1 + iA_2$,

b) A je normální na prostoru $\mathcal{H}$, právě když operátory A_1, A_2 komutují.

Dokažte.

7.3.67

Lineární operátor A na prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$ nazveme kladný (resp. nezáporný), právě když je hermitovský na prostoru $\mathcal{H}$ a $\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle > 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$, $x \neq \vec{0}$ ($\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle \geq 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$). Dokažte:

a) hermitovský operátor je kladný (resp. nezáporný), právě když všechna jeho vlastní čísla jsou kladná (resp. nezáporná),

b) kladný operátor je regulární.

7.3.68

Nechť A je nezáporný operátor na prostoru $\mathcal{H}_n$ se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$, $h(A) = h > 0$. Potom existují nezáporné operátory $A_1, \ldots, A_h \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ takové, že:

a) $h(A_j) = 1$ pro každé $j \in \widehat{h}$,

b) $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_h$.

Dokažte.

7.3.69

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, A je zobrazení prostoru $\mathcal{H}$ na sebe takové, že pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ je $\langle A\vec{x}|A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$. Potom je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dokažte.

7.3.70

Nechť $\mathcal{H}_n$ je prostor se skalárním součinem, A je zobrazení prostoru $\mathcal{H}_n$ do sebe takové, že pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ je $\langle A\vec{x}|A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$. Potom je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Dokažte.

7.3.71

Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, A zobrazení prostoru $\mathcal{H}_n$ do sebe takové, že:

a) pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ je $\|A\vec{x} - A\vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$,

b) $\|A\vec{0}\| = 0$.

Potom pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ je $\langle A\vec{x}|A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$. Dokažte.

7.3.72

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^2$ se standardním skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} i & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Zjistěte, zda A je normální operátor na prostoru $\mathbb{C}^2$.

7.3.73

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem, $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+i\\2-i\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+3i\\6+i\\-4\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2i\\-5\end{pmatrix}$. Zjistěte, zda A je:

a) hermitovský operátor na prostoru $\mathbb{C}^3$,

b) unitární operátor na prostoru $\mathbb{C}^3$.

7.3.74

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{P}_2$ se skalárním součinem $\langle y|z\rangle = y(0)\overline{z(0)} + y(1)\overline{z(1)}$ pro každé $y, z \in \mathcal{P}_2$, $(Ax)(t) = x(t+\alpha)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_2$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ taková, že A je:

a) hermitovský,

b) unitární operátor na prostoru $\mathcal{P}_2$.

7.3.75

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{P}_2$ se skalárním součinem $\langle y|z\rangle = y(0)\overline{z(0)} + y(-1)\overline{z(-1)}$ pro každé $y, z \in \mathcal{P}_2$, $(Ax)(t) = x(t+\alpha) + x(t-2\alpha)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_2$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ taková, že A je:

a) hermitovský,

b) unitární operátor na prostoru $\mathcal{P}_2$.

7.3.76

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Nalezněte všechna α taková, že A je symetrický operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$.

7.3.77

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -2 \\ \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechny hodnoty parametrů α, β takové, že A je:

a) unitární,

b) hermitovský operátor na prostoru $\mathbb{C}^3$.

7.3.78

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechna α taková, že A je:

a) normální,

b) symetrický,

c) ortogonální operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$.

7.3.79

Zjistěte, zda je operátor derivování na prostoru $\mathcal{P}_n$ se skalárním součinem hermitovský, je-li:

a) $\langle x | y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_n$,

b) $\langle x | y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x(\frac{j}{n})\overline{y(\frac{j}{n})}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_n$.

7.3.80

Zjistěte, zda je operátor derivování na prostoru $\mathcal{P}_n$ se skalárním součinem unitární, je-li:

a) $\langle x | y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_n$,

b) $\langle x | y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x(\frac{j}{n})\overline{y(\frac{j}{n})}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_n$.

7.3.81

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Je možné na prostoru $\mathcal{P}_n$ zavést skalární součin tak, aby operátor derivování na prostoru $\mathcal{P}_n$ s tímto skalárním součinem byl normální?

7.3.82

Nechť A je lineární operátor na prostoru $\mathcal{P}_n$ se skalárním součinem $\langle x|y\rangle = \displaystyle\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_n$, $(Ax)(t) = x(-t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_n$, $t \in \mathbb{C}$. Zjistěte, zda A je:

a) hermitovský,

b) unitární operátor na prostoru $\mathcal{P}_n$.

7.3.83

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_2$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$.

Nalezněte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, aby operátor byl unitární na prostoru $\mathcal{H}_2$.

7.3.84

Nechť $\mathbb{C}$ je unitární matice z prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$ se skalárním součinem $\langle \mathbb{A}|\mathbb{B}\rangle = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$ pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbb{B} = (b_{ij})$. Určete $\|\mathbb{C}\|$.

7.3.85

Nechť $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ jsou unitární matice z prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$ se skalárním součinem $\langle \mathbb{A}|\mathbb{B}\rangle = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$ pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbb{B} = (b_{ij})$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n,n}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n,n})$, $A\mathbb{X} = \mathbb{C}\mathbb{X}$, $B\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{D}$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dokažte, že A, B jsou unitární operátory na prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$, které komutují.

7.3.86

Nechť $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ jsou hermitovské matice z prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$ se skalárním součinem $\langle \mathbb{A}|\mathbb{B}\rangle = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$ pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbb{B} = (b_{ij})$, $A \in \mathcal{L}(T^{n,n}$, $B \in \mathcal{L}(T^{n,n})$, $A\mathbb{X} = \mathbb{C}\mathbb{X}$, $B\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{D}$ pro každé $\mathbb{X} \in T^{n,n}$. Dokažte, že A, B jsou hermitovské operátory na prostoru $T^{n,n}$, které komutují.

7.3.87

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem $\langle\cdot|\cdot\rangle$ nad tělesem $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Definujme na množině $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ operace sčítání a násobení číslem z tělesa $\mathbb{C}$ obvyklým způsobem. Potom:

a) $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$,

b) zobrazení $\{\cdot|\cdot\} : (\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times (\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \to \mathbb{C}$, $\{\vec{z}_1|\vec{z}_2\} : \langle\vec{x}_1|\vec{x}_2\rangle + \langle\vec{y}_1|\vec{y}_2\rangle$, $\vec{z}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1)$, $\vec{z}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2)$, je skalární součin na prostoru $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

c) zobrazení $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, $A(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, -\vec{x})$, je unitární operátor na prostoru $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Dokažte.

7.3.88

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_2$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$. Nalezněte ortonormální diagonální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ operátoru A, je-li:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$, b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$, c) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$.

7.3.89

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_3$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$. Nalezněte ortonormální diagonální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ operátoru A, je-li:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$, c) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$,

b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, d) ${}^{\mathcal{X}}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3.90

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_4$ nad $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_4)$. Nalezněte ortonormální diagonální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4)$ operátoru A, je-li:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.3.91

Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze vektorového prostoru $\mathcal{H}_2$ nad $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$. Nalezněte ortonormální bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ prostoru $\mathcal{H}_2$, v níž má matice operátoru A kvazidiagonální tvar, a určete jej, je-li:

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, c) ${}^{\mathcal{X}}A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

7.3.92

Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechny ortogonální matice $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$ takové, že matice $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{B}$ je diagonální.

7.3.93

Nechť A je symetrický operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ takový, že $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -4$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}A$.

7.3.94

Nechť A je symetrický operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ takový, že $A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -\frac{9}{2}$. Vypočtěte $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.3.95

Nechť A je symetrický operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, který není regulární a platí $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte spektrum operátoru A.

7.3.96

Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 4x_1y_1 + \alpha_{12}x_1y_2 + \alpha_{21}x_2y_1 + 4x_2y_2$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $A^{\mathcal{X}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Určete α_{12}, α_{21} tak, aby operátor A byl symetrický.

7.3.97

Nechť A je ortogonální operátor na prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem takový, že $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\det A < 0$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}A$.

7.3.98

Nechť A je ortogonální operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ takový, že $A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\det A < 0$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}}A$.

Výsledky

7.3.1 vl. č. 1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a vl. č. 4: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 7.3.2 a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. 7.3.3 vl. č. 2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vl. č. 1: $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vl. č. -1: $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 7.3.4 vl. č. 3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vl. č. 0: $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. 7.3.5 a) pro α ryze imaginární, b) pro $\alpha = 0$. V tomto případě má vl. č. 0: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vl. č. $\sqrt{2}$: $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vl. č. $-\sqrt{2}$: $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 7.3.6 hermitovská je jen matice $\mathbb{B}$, vl. č. 1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vl. č. 0: $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vl. č. 2: $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. 7.3.8 $\begin{pmatrix} -2-3i & 1-2i \\ 5-4i & 4+2i \end{pmatrix}$. 7.3.9 $\begin{pmatrix} 128 & 413 & 514 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}$. 7.3.10 $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. 7.3.11 a) $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 7.3.12 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 7.3.13 $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$. 7.3.14 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 7.3.21 $\det \mathbb{A}^* = \overline{\det \mathbb{A}}$. 7.3.27 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $\mathbb{C}^2$ se standardním skalárním součinem, ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 7.3.30 $\frac{n(n+1)}{2}$. 7.3.31 n^2. 7.3.43 $\frac{n(n-1)}{2}$. 7.3.44 n^2. 7.3.53 na diagonále musí být čísla v absolutní hodnotě rovná 1. 7.3.63 nemusí. 7.3.72 ne. 7.3.73 a) ano, b) ne. 7.3.74 a) $\alpha = 0$, b) $\alpha = 0$. 7.3.75 a) $\alpha = 0$, b) neexistuje. 7.3.76 $\alpha = -\frac{1}{2}$. 7.3.77 a) neexistuje, b) $\alpha = -2 \wedge \beta = -8$. 7.3.78 a) $\alpha = 1$, b) $\alpha = 1$, c) neexistuje. 7.3.79 a), b) pouze pro $n = 1$. 7.3.80 a), b) ne. 7.3.81 ne. 7.3.82 a), b) pouze pro $n = 1$. 7.3.83 a) neexistuje, b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7.3.84 $\sqrt{n}$. 7.3.88 a) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}$, b) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} i-2 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. 7.3.89 a) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ i \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -2i \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$, c) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} =$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, d) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. 7.3.90 a), b) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $(\vec{y}_4)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}$. 7.3.91 a) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, b) $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, c) $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $(\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. 7.3.92 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$. 7.3.93 $\begin{pmatrix}4 & -1\\4 & -2\end{pmatrix}$. 7.3.94 $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\4\end{pmatrix}$.

7.3.95 $\{0, -2\}$. 7.3.96 neexistují. 7.3.97 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\-2 & -2 & 1\\2 & -1 & 2\end{pmatrix}$. 7.3.98 a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{4}{3} & -1\end{pmatrix}$, b) $\vec{y}_1 = \sqrt{6}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \sqrt{6}\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$, ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

7.4 Metrická geometrie

7.4.1

Určete vzdálenost bodu $\vec{a}$ od P v prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, je-li:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\\5\end{pmatrix}$, $P = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$,

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\5\\4\\13\end{pmatrix}$, $P \equiv \begin{array}{rcrcrcrcl} 5x & & & - & z & - & 2u & = & 0\\ 7x & - & 3y & + & 3z & - & 3u & = & 0\end{array}$.

7.4.2

Určete vzdálenost bodu $\vec{a}$ od P v prostoru $\mathbb{R}^4$ se skalárním součinem $\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle = v_1w_1 + 2v_2w_2 + v_3w_3 - v_3w_4 - v_4w_3 + 3v_4w_4$ pro každé $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{pmatrix}$, je-li:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2\end{pmatrix}$, $P \equiv \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & u & = & 0\\ & & y & & & - & 2u & = & 0\end{array}$,

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

7.4.3

Určete vzdálenost variet W_1, W_2 v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, je-li:

a) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 11 \\ 2x & & & + & 2z & = & 32 \end{array}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & 7t \\ y & = & 1 & + & 2t \\ z & = & 1 & + & 3t \end{array}$,

b) $W_1 \equiv x + 5y + z = 3$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\alpha$,

c) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\alpha$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\alpha$,

d) $W_1 \equiv x - 2y - 2z = 3$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\alpha$.

7.4.4

Určete vzdálenost bodu $\vec{a}$ od variety W v prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, je-li:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 2y & + & z & + & 2u & = & 9 \\ 2x & - & 4y & + & 2z & + & 3u & = & 12 \end{array}$,

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 3y + 2y + 2u = -3 \wedge 3x + 4y + 3z + u = 3 \wedge x - z + u = -3 \right\}$,

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$, $W \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & - & y & - & z & + & 2u & = & 0 \\ 3x & & & + & z & + & u & = & 2 \end{array}$,

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\alpha$,

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha$.

7.4.5

Určete vzdálenost bodu $\vec{a}$ od variety W v prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ pro každé $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, je-li:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & -2 \end{array}$.

7.4.6

Určete vzdálenost variet W_1, W_2 v prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, je-li:

a) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

b) $W_1 \equiv x - 2y + 3z - u = 31$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & & & t \\ y & = & & & 2t \\ z & = & 1 & + & t \\ u & = & 2 & & \end{array}$.

7.4.7

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$ pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ jsou dány $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. Určete jejich vzdálenost.

7.4.8

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - 2u_3v_2 - 2u_2v_3 + 5u_3v_3$ pro každé $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ jsou dány $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 \equiv x - y = 2$, $W_3 \equiv z = 1$. Určete vzdálenost W_1 od $W_2 \cap W_3$.

7.4.9

Nechť W_1, W_2 jsou mimoběžné přímky v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$, W jejich příčka, která s oběma svírá úhel $\frac{\pi}{2}$, $W \cap W_1 = \{\vec{a}\}$, $W \cap W_2 = \{\vec{b}\}$. Potom $\rho(W_1, W_2) = \rho(\vec{a}, \vec{b})$. Dokažte.

7.4.10

Nechť $\vec{x}, \vec{y}$ jsou nenulové vektory z vektorového prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$. Potom:

a) úhel vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ je roven nule, právě když existuje $\alpha > 0$ takové, že $\vec{x} = \alpha\vec{y}$,

b) úhel vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ je roven π, právě když existuje $\alpha < 0$ takové, že $\vec{x} = \alpha\vec{y}$.

Dokažte.

7.4.11

Nechť $\vec{x}, \vec{y}$ jsou nenulové vektory z vektorového prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, které svírají úhel φ, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Určete úhel vektorů: a) $\vec{x}, \vec{\alpha} y$, b) $\alpha\vec{x}, \alpha\vec{y}$.

7.4.12

Nechť $\vec{u}, \vec{v}$ jsou nenulové vektory z vektorového prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, které svírají úhel $\frac{\pi}{3}$, $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$. Nechť $\vec{x} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{y} = \vec{u} + 2\vec{v}$. Vypočtěte $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$.

7.4.13

Nechť $\vec{x}, \vec{y}$ jsou nenulové vektory z vektorového prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, které svírají úhel $\frac{5\pi}{6}$, $\|\vec{x}\| = 4$, $\|\vec{y}\| = 2$. Určete číslo α tak, aby soubor $(2\vec{x} - \alpha\vec{y}, \vec{x} + 2\vec{y})$ byl ortogonální.

7.4.14

Nechť $(\vec{x}, \vec{y})$ je ortogonální soubor vektorů z vektorového prostoru $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \neq 0$. Určete číslo α tak, aby vektory $\alpha\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \alpha\vec{y}$ svíraly úhel: a) 0, b) π, c) $\frac{\pi}{6}$.

7.4.15

Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru $\mathcal{H}_3$ nad $\mathbb{R}$ takový, že každé dva vektory souboru svírají úhel $\frac{\pi}{3}$, $\|\vec{x}_i\| = 1$ pro každé $i \in \widehat{3}$. Dokažte, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze prostoru $\mathcal{H}_3$ a nalezněte ortonormální bázi $\mathcal{H}_3$.

7.4.16

Určete úhel variet $W_1, W_3 \subset \mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, je-li:

a) $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right]_\alpha$,

b) $W_1 \equiv \begin{array}{rcr} y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & -2 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \end{array}$,

c) $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\alpha$.

7.4.17

Určete úhel variet W_1, W_2 z předcházejícího příkladu, je-li skalární součin v prostoru $\mathbb{R}^3$ definován předpisem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 - u_1v_3 - u_3v_1 + 3u_3v_3$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

7.4.18

Světelný paprsek v eukleidovském $\mathbb{R}^2$ prochází bodem $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ a dopadá pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ na přímku $W \equiv x = 0$. Určete neparametrickou rovnici odraženého paprsku.

7.4.19

Světelný paprsek v eukleidovském $\mathbb{R}^2$ se pohybuje po přímce $W_1 \equiv 2x - 3y = 12$ a odráží se od přímky $W_2 \equiv y = 0$. Určete:

a) bod odrazu,

b) naparametrickou rovnici přímky, po níž se pohybuje odražený paprsek.

7.4.20

Nechť $W_1 \equiv x + 2y = 1$ a $W_2 \equiv x + 2y = 3$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$. Nalezněte neparametrické rovnice všech přímek v $\mathbb{R}^2$, které jsou rovnoběžné s W_1 i W_2 a dělí vzdálenost mezi nimi v poměru $1 : 3$.

7.4.21

Nechť $W_1 \equiv x = 0$ a $W_2 \equiv 3x - 4y = -12$ jsou variety v prostoru v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$. Ve W_1 nalezněte všechny body, které mají stejnou vzdálenost od bodu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jako od W_2.

7.4.22

V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ nalezněte neparametrické rovnice všech přímek, které procházejí bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a mají stejnou vzdálenost od bodů $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7.4.23

Nechť $W_1 \equiv x - 2y = -3$ a $W_2 \equiv x = 0$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$. Nalezněte neparametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^2$, které s W_1 svírají úhel $\frac{\pi}{6}$ a procházejí $W_1 \cap W_2$.

7.4.24

Nechť $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ eukleidovský. Nalezněte neparametrické rovnice přímek, které svírají úhel $\frac{\pi}{2}$, procházejí bodem $\vec{a}$ a mají stejnou vzdálenost od bodu $\vec{b}$, je-li: a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7.4.25

Nechť $W \equiv x + y = -1$ je varieta v prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Nalezněte neparametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^2$, které procházejí bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a svírají s W úhel $\frac{\pi}{4}$.

7.4.26

Nechť $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha$, $W_2 \equiv 3x + 5y - z = 2$ a $W_3 \equiv x - y + 6z = -4$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice přímky v prostoru $\mathbb{R}^3$, která prochází $W_1 \cap W_2$ a s W_3 svírá úhel $\frac{\pi}{2}$.

7.4.27

Nechť $W_1 \equiv x + y + z = 2$, $W_2 \equiv x + 2y - z = 1$, $W_3 \equiv x + 2y + z = -1$, $W_4 \equiv x + 2y + z = 3$ jsou variety v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Ve $W_1 \cap W_2$ nalezněte všechny body, které mají stejnou vzdálenost od W_3 jako od W_4.

7.4.28

Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ eukleidovský, $\vec{n}_{W_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W_1$, $\begin{array}{rcrcr} W_2 \equiv x & = & & & r \\ y & = & -7 & - & 4s \\ z & = & 1 & + & s \end{array}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ve $W_1 \cap W_2$ nalezněte všechny body, jejichž poměr vzdáleností od bodů $\vec{a}, \vec{b}$ je $2 : 3$.

7.4.29

Nechť $W_1 \equiv x - y - z = 0$, $\begin{array}{rcrcr} W_2 \equiv x & = & 2 & - & 2t \\ y & = & s & & \\ z & = & & & t \end{array}$ jsou variety v prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 - 2u_2v_3 - 2u_3v_2$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$,

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ve $W_1 \cap W_2$ nalezněte všechny body, které mají stejnou vzdálenost od bodu $\vec{a}$ jako od bodu $\vec{b}$.

7.4.30

Nechť $W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha$ je varieta v prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nalezněte ve W všechny body, jejichž poměr vzdáleností od bodů $\vec{a}, \vec{b}$ je $1:2$.

7.4.31

Nechť $W \equiv 2x + y - 4z = -5$ je varieta v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice všech rovin v prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou rovnoběžné s W a mají od bodu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ vzdálenost $\sqrt{21}$.

7.4.32

Nechť $W_1 \equiv x - 4y = -7$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 6 & + & r \\ y & = & 2 & - & r \\ z & = & 5 & & \end{array}$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$, které leží ve W_1, protínají W_2 a svírají s W_2 úhel $\frac{\pi}{3}$.

7.4.33

Nechť $W_1 \equiv 2x + 3y - z = 0$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou rovnoběžné s W_1, s W_2 svírají úhel $\frac{\pi}{4}$ a jsou podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$.

7.4.34

Nechť $W_1 \equiv x + y + z = -1$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$, které procházejí bodem $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, jsou rovnoběžné s W_1 a s W_2 svírají úhel $\frac{\pi}{2}$.

7.4.35

Nechť $W = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\alpha$ je varieta v prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_3 + u_3v_2$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$. Nalezněte neparametrické rovnice všech rovin v prostoru $\mathbb{R}^3$, které s W svírají úhel $\frac{\pi}{2}$ a mají od bodu $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ vzdálenost $\sqrt{3}$.

7.4.36

Nechť $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & -3 \\ x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$, $W_2 \equiv x - y = 0$ jsou variety v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Nalezněte parametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$, které procházejí bodem $\begin{pmatrix}1\\7\\9\end{pmatrix}$, svírají úhel $\frac{\pi}{2}$ s W_1 a úhel $\frac{\pi}{6}$ s W_2.

7.4.37

Nechť $W \equiv \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array}$ je varieta v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice všech rovin W_1, W_2 v prostoru $\mathbb{R}^3$, takových, že $W_1 \cap W_2 = W$, W_1 a W_2 svírají úhel $\frac{\pi}{2}$ a mají stejnou vzdálenost od počátku.

7.4.38

$W \equiv x - y = 0$ je varieta v prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_3$ pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$. Nalezněte neparametrické rovnice všech rovin v prostoru $\mathbb{R}^3$, které s W svírají úhel $\frac{\pi}{2}$, jsou podprostory $\mathbb{R}^3$ a jejichž vzdálenost od bodu $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ je stejná jako od bodu $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

7.4.39

Nechť $W_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right]_\alpha$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & z & = & 1 \end{array}$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice všech rovin v prostoru $\mathbb{R}^3$, které s W_1 svírají úhel $\frac{\pi}{4}$, jsou rovnběžné s W_2 a mají od bodu $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ vzdálenost 2.

7.4.40

Nechť $W_1 \equiv \; x = 1$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & & & = & 1 \end{array}$, $W_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\alpha$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice všech přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$, které procházejí bodem $W_1 \cap W_3$, s W_1 svírají úhel $\dfrac{\pi}{6}$ a s W_2 úhel $\dfrac{\pi}{4}$.

7.4.41

Nechť $W_1 \equiv \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\alpha$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte neparametrické rovnice všech rovin v prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou rovnoběžné s W_1, s W_2 svírají úhel $\dfrac{\pi}{2}$ a procházejí $W_1 \cap W_2$.

7.4.42

Nechť $W \equiv x - 2y + z = 3$ je soubor vektorů z eukleidovském prostoruu $\mathbb{R}^3$. Nalezněte ve W všechny body, které mají od bodů $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stejnou vzdálenost a určete ji.

7.4.43

Nechť (x_1, x_2, x_3, x_4) je soubor vektorů z prostoru $\mathcal{P}_3$ se skalárním součinem $\langle x|y \rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2}$ pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$, $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, $x_1(t) = 3t^2 + 2t + 1$, $x_2(t) = -t^2 + 2t + 1$, $x_3(t) = 3t^2 + 2t + 5$, $x_4(t) = 3t^2 + 5t + 2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nalezněte v $\mathcal{P}_3$ všechny polynomy s reálnými koeficienty, které mají od všech x_j, $j \in \widehat{4}$, stejnou vzdálenost a určete ji.

7.4.44

Nechť $W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 0 \\ & & y & = & -5 \end{array}$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice všech příček variet W_1, W_2, které s W_1 svírají úhel $\dfrac{\pi}{3}$ a s W_2 úhel $\dfrac{\pi}{2}$.

7.4.45

Nechť $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ y & - & z & = & 1 \end{array}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice všech příček variet W_1, W_2, které s W_1 svírají úhel $\dfrac{\pi}{2}$ a s W_2 úhel $\dfrac{\pi}{4}$.

7.4.46

Nechť $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & & & 4t \\ y & = & 4 & + & 3t \\ z & = & -1 & - & 2t \end{array}$, $W_2 \equiv x - y + 3z = -2$ jsou variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice pravoúhlého průmětu W_1 do W_2.

7.4.47

Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Nalezněte pravoúhlý průmět bodu $\vec{a}$ do W, je-li:

a) $\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}\right]_\alpha$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 22 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$,

b) $W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 5y & - & z & = & 21 \\ 4x & + & 3y & - & 6z & = & -37 \end{array}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

7.4.48

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem takový, že $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z} \times \vec{u}$ a $\vec{x} \times \vec{z} = \vec{y} \times \vec{u}$. Potom je soubor $(\vec{x} - \vec{u}, \vec{y} - \vec{z})$ lineárně závislý. Dokažte.

7.4.49

Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem. Potom:

a) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{0}$,

b) $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je lineárně nezávislý, právě když $(\vec{x} \times \vec{y} | \vec{z}) \neq 0$.

Dokažte.

7.4.50

Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A\vec{x} = \vec{x} \times \vec{a}$.

a) Dokažte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

b) Zjistěte, zda je A diagonalizovatelný operátor na prostoru $\mathbb{R}^3$, v kladném případě nalezněte diagonální bázi operátoru A.

c) Zjistěte, zda A je normální operátor na prostoru $\mathbb{R}^3$.

d) Zjistěte, zda A je regulární operátor na prostoru $\mathbb{R}^3$.

Výsledky

7.4.1 a) $\sqrt{22}$, b) 0. 7.4.2 a) 2, b) $\sqrt{130}$. 7.4.3 a) $2\sqrt{21}$, b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d) 0. 7.4.4 a) 5, b) 7, c) $\sqrt{51}$, d) $\sqrt{7}$, e) 2. 7.4.5 a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, b) $3\sqrt{2}$, c) $\sqrt{89}$. 7.4.6 a) 3, b) $2\sqrt{15}$. 7.4.7 2. 7.4.8 $\sqrt{2}$. 7.4.11 a) φ pro $\alpha > 0$, $\pi - \varphi$ pro $\alpha < 0$, b) φ. 7.4.12 -12. 7.4.13 4. 7.4.14 a) 1, b) -1, c) $\sqrt{3}$ nebo $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 7.4.15 $\left(\vec{x}_1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2), \dfrac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3)\right)$. 7.4.16 a) $\dfrac{\pi}{6}$, b) $\dfrac{\pi}{4}$, c) $\dfrac{\pi}{2}$. 7.4.17 a) $\dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, b) $\dfrac{\pi}{2}$, c) $\arccos\dfrac{12}{\sqrt{438}}$. 7.4.18 $x+y = 3$ nebo $x-y = -15$. 7.4.19 a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $2x+3y = 12$. 7.4.20 $2x+4y = 3$ nebo $2x+4y = 5$. 7.4.21 $\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. 7.4.22 $x+2y = 5$ nebo $x - 6y = -11$. 7.4.23 $2(-8 + 5\sqrt{3})x + 22y = 33$ nebo $2(-8 - 5\sqrt{3})x + 22y = 33$. 7.4.24 a) $3x + 4y = 25$, $4x - 3y = 25$, b) $x - 3y = -2$, $3x + y = 4$. 7.4.25 $y = 1$ nebo $2x - y = 1$. 7.4.26 $x + y = 0$, $6y + z = -2$. 7.4.27 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 7.4.28 $\begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$. 7.4.29 $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. 7.4.30 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{11 + \sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{11 - \sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$. 7.4.31 $2x + y - 4z = -17$ nebo $2x + y - 4z = 25$. 7.4.32 $x = 5+4t$, $y = 3+t$, $z = 5+t$ nebo $x = 5+4t$, $y = 3+t$, $z = 5-t$. 7.4.33 neexistuje. 7.4.34 $x = -1$, $y + z = 0$. 7.4.35 $2x - y - z = 0$ nebo $2x - y - z = -6$. 7.4.36 $x = 1 + t$, $y = 7$, $z = 9 + t$ nebo $x = 1 + 4t$, $y = 7 + t$, $z = 9 + t$. 7.4.37 $W_1 \equiv x + y + \sqrt{2}z = 1$, $W_2 \equiv x + y - \sqrt{2}z = 1$. 7.4.38 $y + 2z = 0$ nebo $y = 0$. 7.4.39 neexistuje. 7.4.40 $x = 1 + t$, $y = -1 + \sqrt{2}t$, $z = t$ nebo $x = 1+t$, $y = -1-\sqrt{2}t$, $z = t$. 7.4.41 $y+2z = 2$. 7.4.42 $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\sqrt{131}}{6}$. 7.4.43 $x(t) = 3+3t+t^2$, 3. 7.4.44 $x = 5\sqrt{2} + t$, $y = \sqrt{2}t$, $z = t$ nebo $x = -5\sqrt{2} + t$, $y = -\sqrt{2}t$, $z = t$. 7.4.45 $x = -4 + t$, $y = t$, $z = 1$ nebo $x = 2 + t$, $y = 0$, $z = 1 + t$. 7.4.46 $x = -4 + 7t$, $y = 1 + 4t$, $z = 1 - t$. 7.4.47 a) $\dfrac{1}{45}\begin{pmatrix} 454 \\ 235 \\ -323 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$. 7.4.50 b) pouze pro $\vec{a} = \vec{0}$, např. $\mathcal{E}$, c) ano, d) ne.