

Datum sestavení dokumentu: 4. června 2013

Lineární algebra 1

Lubomíra Balková

e-mail: lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz

Slovo na úvod: Abstraktnost, logická výstavba a univerzálnost lineární algebry jsou výhodami této teorie. Začátečník je zřejmě neoceněn ihned, ale až postupem času, kdy se v nejrůznějších předmětech budou pojmy z lineární algebry objevovat. Mnohokrát se po vás bude chtít řešit soustavu lineárních algebraických rovnic, mnohokrát budete zkoumat vlastní čísla a vektory matic či operátorů, které budou odpovídat různým fyzikálním vlastnostem. Budete řešit lineární diferenciální rovnice, což budou rovnice pro jakési lineární zobrazení apod.

Abyste se abstraktnosti lineární algebry příliš nezalekli, je připojena na konci těchto skript kapitola o historii vektorového prostoru, ve které vám má být útěchou, že lineární algebra se učí „proti toku času“ a že tedy vrcholem veškeré abstrakce je pojem vektorového prostoru, se kterým my výuku lineární algebry zahajujeme. Tedy hlavu vzhůru, po prokousání se první kapitolou vezte, že už to bude jenom jednodušší a jednodušší...

Tato skripta jsou určena studentům prvního ročníku FJFI a zahrnují látku obou kurzů lineární algebry: LA1 i LAP. Hvězdičkami *** jsou označeny kapitoly, tvrzení a důkazy, které jsou vyžadovány pouze v rámci předmětu LAP.

Obsah

1	Vektorový prostor	3
1.1	Příklady vektorových prostorů	6
2	Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic	9
3	Lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze, souřadnice	12
3.1	Lineární závislost a nezávislost	15
3.2	Báze a dimenze	17
3.3	Souřadnice	24
4	Podprostory	27
4.1	1. věta o dimenzi	31
4.2	Doplňk podprostoru	33
5	Lineární zobrazení	34
5.1	Hodnost, jádro, defekt	39
5.2	2. věta o dimenzi	42
5.3	Izomorfismus	43
5.4	Duální báze ***	44
5.5	Doplňk podprostoru vektorového prostoru nekonečné dimenze ***	44
5.6	Projektor ***	46
5.7	Matice a lineární zobrazení	46
6	Lineární geometrie ***	52
6.1	Lineární variety	52
6.2	Afinní obaly	52
6.3	Lineární variety jako posunuté podprostory	54
6.4	Vzájemná poloha, průnik, příčka, LK, obrazy a vzory lineárních variet	56
6.5	Lineární variety jako afinní obaly	57
6.6	Lineární variety jako průniky nadrovin	59

7	Konvexní množiny ***	61
8	Pro zajímavost: Historie vektorového prostoru	64
9	Dodatek: Polynomy	68
	Reference	71

1 Vektorový prostor

Uvedme nejprve dva pojmy, které budeme v definici vektorového prostoru využívat.

Definice 1. Kartézským součinem množin A a B nazveme množinu uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a \in A, b \in B$, tj.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je taková podmnožina $A \times B$, pro niž platí:

$$(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c.$$

Poznámka 1. Místo $(a, b) \in f$ obvykle píšeme $f(a) = b$. Říkáme, že a je **vzorem** b a b je **obrazem** a při zobrazení f .

Poznámka 2. Můžete si i nadále představovat, že f je předpis, který každému prvku z A přiřadí nejvýše jeden prvek z B .

Definice 2. Číselným tělesem nazveme každou podmnožinu $T \subset \mathbb{C}$, která má alespoň dva prvky a splňuje:

1. pro každé $\alpha, \beta \in T$ platí $\alpha + \beta \in T$ (hovoříme o **uzavřenosti T na sčítání**),
2. pro každé $\alpha, \beta \in T$ platí $\alpha \cdot \beta \in T$ (hovoříme o **uzavřenosti T na násobení**),
3. pro každé $\alpha \in T$ platí $-\alpha \in T$ (hovoříme o **uzavřenosti T vůči opačnému prvku**),
4. pro každé $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, platí $\frac{1}{\alpha} \in T$ (hovoříme o **uzavřenosti T vůči převrácené hodnotě**).

Poznámka 3. Zamysleme se nad tím, které množiny (ne)tvoří těleso.

1. Množina přirozených čísel \mathbb{N} netvoří těleso, např. $3 \in \mathbb{N}$, ale $-3 \notin \mathbb{N}$.
2. Množina celých čísel \mathbb{Z} netvoří těleso, např. $2 \in \mathbb{Z}$, ale $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. Množina racionálních čísel \mathbb{Q} tvoří těleso. Je to nejmenší těleso ve smyslu inkluze, tj. \mathbb{Q} je podmnožinou každého tělesa.
4. My budeme téměř výlučně pracovat s tělesy reálných čísel \mathbb{R} a komplexních čísel \mathbb{C} . Mějme ale stále na paměti, že tvrzení, která budeme uvádět, platí pro libovolné číselné těleso, není-li uvedeno jinak.

Poznámka 4. Každé těleso obsahuje čísla 0 a 1. Obsahuje totiž podle definice nějaký prvek α , pak také $-\alpha \in T$ a dále také $\alpha + (-\alpha) = 0 \in T$. Jelikož T obsahuje alespoň dva prvky, určitě obsahuje nějaké $\alpha \neq 0$, pak také $\frac{1}{\alpha} \in T$ a dále také $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \in T$.

Definice 3. Nechť jsou dány:

1. číselné těleso T (prvky nazýváme **čísla**),
2. neprázdná množina V (prvky nazýváme **vektory**),
3. zobrazení $\oplus : V \times V \rightarrow V$ (nazýváme je **sčítání vektorů**),
4. zobrazení $\odot : T \times V \rightarrow V$ (nazýváme je **násobení vektoru číslem z tělesa**).

Řekneme, že V je **vektorový prostor nad tělesem T s operacemi \oplus a \odot** , pokud je splněno 8 podmínek (nazýváme je **axiomy vektorového prostoru**):

1. pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$ (**komutativní zákon pro \oplus**),

2. pro každé $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ platí $\vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) = (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c}$ (**asociativní zákon** pro \oplus),
3. existuje $\vec{b} \in V$ takové, že pro každé $\vec{a} \in V$ platí $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{a}$ (vektor \vec{b} s touto vlastností nazýváme **nulový** a značíme $\vec{0}$),
4. pro každé $\vec{a} \in V$ existuje $\vec{b} \in V$ takové, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{0}$ (vektor \vec{b} s touto vlastností nazýváme **opačný** k vektoru \vec{a} a značíme $-\vec{a}$),
5. pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $(\alpha \cdot \beta) \odot \vec{a} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{a})$ (**asociativní zákon** pro \odot),
6. pro každé $\vec{a} \in V$ platí $1 \odot \vec{a} = \vec{a}$,
7. pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $(\alpha + \beta) \odot \vec{a} = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\beta \odot \vec{a})$ (**distributivita** \odot vzhledem ke sčítání čísel),
8. pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí $\alpha \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\alpha \odot \vec{b})$ (**distributivita** \odot vzhledem ke sčítání vektorů).

Poznámka 5. Znovu zdůrazněme, že vektorový prostor je řádně definován, jsou-li dány 4 věci:

1. neprázdná množina vektorů V ,
2. těleso T ,
3. operace \oplus ,
4. operace \odot .

A zároveň jsou splněny všechny axiomy. Někdy vektorový prostor značíme podrobněji (V, T, \oplus, \odot) .

Poznámka 6. Pro $T = \mathbb{R}$ hovoříme o **reálném vektorovém prostoru** a pro $T = \mathbb{C}$ o **komplexním vektorovém prostoru**.

Poznámka 7. V definici jsme poctivě rozlišovali operace \oplus pro sčítání vektorů, $+$ pro sčítání čísel, \odot pro násobení vektoru číslem, \cdot pro násobení čísel. V dalším textu už nebudeme používat symboly \oplus a \odot , z kontextu bude totiž vždy jasné, zda jde o sčítání ve V nebo v T . Navíc budeme vynechávat symbol pro násobení, a to v obou případech, tedy je-li $\alpha, \beta \in T$ a $\vec{a} \in V$, pak píšeme $\alpha\beta$ místo $\alpha \cdot \beta$ a $\alpha\vec{a}$ místo $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \odot \vec{a}$.

Poznámka 8. Prvky tělesa budeme značit obvykle řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ a vektory obvykle písmeny ze začátku a konce abecedy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$. Šipku nad vektory vynecháme jen výjimečně, například v případech vektorů z prostoru polynomů, matic či lineárních zobrazení, kde se ustálilo jiné značení.

Věta 1 (Vlastnosti vektorového prostoru). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Potom platí:*

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor $\vec{0}$.
2. Ke každému vektoru z V existuje právě jeden opačný vektor.
3. Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ existuje právě jedno řešení rovnice $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, a to $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b}$.
4. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $\alpha\vec{0} = \vec{0} = 0\vec{a}$.
5. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí implikace

$$\alpha\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{a} = \vec{0} \vee \alpha = 0).$$

6. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $-(\alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a})$.

Důkaz. ***

1. Podle 3. axiomu obsahuje V nulový vektor $\vec{0}$. Pokud $\vec{z} \in V$ také splňuje vlastnosti nulového vektoru, pak

$$\vec{z} = \vec{z} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{z} = \vec{0},$$

kde jsme využili vlastnosti nulového vektoru a komutativní zákon.

2. Nechť \vec{a} je libovolný vektor z V . Podle 4. axiomu k němu existuje opačný vektor $-\vec{a}$. Pokud $\vec{b} \in V$ splňuje také vlastnosti opačného vektoru k \vec{a} , pak

$$\vec{b} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{a})) = (\vec{b} + \vec{a}) + (-\vec{a}) = (\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) = \vec{0} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{0} = -\vec{a},$$

kde jsme využili komutativitu, asociativitu, vlastnosti nulového a opačného vektoru.

3. Nejprve se přesvědčíme, že $-\vec{a} + \vec{b}$ je řešením, tj. $\vec{a} + (-\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$.
Nechť $\vec{y} \in V$ je také řešením, pak

$$\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} = -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{y}) = (-\vec{a} + \vec{a}) + \vec{y} = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{y} = \vec{0} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y},$$

kde jsme využili komutativitu, asociativitu, vlastnosti nulového a opačného vektoru.

4. Z předchozího bodu víme, že pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ má rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \alpha\vec{a}$ jediné řešení, a to $\vec{x} = \vec{0}$. Ověřme, že také $\alpha\vec{0}$ a $0\vec{a}$ jsou řešením, pak je jasné, že jsou rovny $\vec{0}$.

$$\alpha\vec{a} + \alpha\vec{0} = \alpha(\vec{a} + \vec{0}) = \alpha\vec{a}.$$

$$\alpha\vec{a} + 0\vec{a} = (\alpha + 0)\vec{a} = \alpha\vec{a}.$$

Využili jsme distributivity \odot vůči sčítání vektorů a vůči sčítání čísel.

5. Jde o důkaz výroku

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{a} \in V)(\alpha\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{a} = \vec{0} \vee \alpha = 0)). \quad (1)$$

Dokážeme výrok sporem, předpokládejme tedy platnost negace

$$(\exists \alpha \in T)(\exists \vec{a} \in V)[\alpha\vec{a} = \vec{0} \wedge (\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \alpha \neq 0)].$$

Z tohoto předpokladu odvodíme spor - platnost nepravdivého tvrzení, což znamená, že platil původní výrok (1). Víme, že $A \wedge B$ je ekvivalentní s negací implikace $A \Rightarrow B$. Můžeme tedy předpoklad přepsat jako

$$(\exists \alpha \in T)(\exists \vec{a} \in V)(\alpha\vec{a} = \vec{0} \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \alpha \neq 0).$$

Pak platí

$$\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\alpha}\alpha)\vec{a} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{a}) = \frac{1}{\alpha}\vec{0} = \vec{0},$$

a to je spor s předpokladem, že $\vec{a} \neq \vec{0}$.

6. Z 3. bodu plyne, že rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ má jediné řešení, a to $\vec{x} = -(\alpha\vec{a})$. Ověřme, že také $(-\alpha)\vec{a}$ a $\alpha(-\vec{a})$ jsou řešením, pak je jasné, že jsou rovny $-(\alpha\vec{a})$.

$$\alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} = (\alpha + (-\alpha))\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}.$$

$$\alpha\vec{a} + \alpha(-\vec{a}) = \alpha(\vec{a} + (-\vec{a})) = \alpha\vec{0} = \vec{0}.$$

Využili jsme distributivity \odot vůči sčítání vektorů a vůči sčítání čísel a 4. bod Věty 1.

□

Důkaz Věty 1 se vám asi v první chvíli zdá obtížný, ale nelekejte se. Postupně si zvyknete a na konci semestru zjistíte, že důkazy v lineární algebře jsou bez triků, přímočaré, a tedy velmi jednoduché.

Poznámka 9. Důkaz Věty 1 není jediný možný. Zkuste dokázat některé její body jiným způsobem.

Poznámka 10. Rozmysleme si otázku, kolik vektorů může obsahovat vektorový prostor. Jistě obsahuje alespoň jeden vektor \vec{x} , protože předpokládáme neprázdnot V . Může obsahovat pouze jeden vektor? Ano. Definujeme-li operace $\vec{x} + \vec{x} = \vec{x}$ a pro každé $\alpha \in T$ $\alpha\vec{x} = \vec{x}$, pak $V = \{\vec{x}\}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T . Vektor \vec{x} ve V hraje úlohu nulového vektoru, proto můžeme psát $V = \{\vec{0}\}$ a tento prostor nazýváme **nulový vektorový prostor**.

Může mít nenulový vektorový prostor konečný počet vektorů? Nemůže. Existuje-li ve V $\vec{x} \neq \vec{0}$, pak také $2\vec{x}, 3\vec{x}, 4\vec{x}, \dots$ patří do V . Tyto vektory jsou vzájemně různé, protože pro $m \neq n$ platí podle Věty 1 $m\vec{x} - n\vec{x} = (m - n)\vec{x} \neq \vec{0}$.

1.1 Příklady vektorových prostorů

Příklad 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$.

1. Nechť T je těleso.

2. Položme $V = T^n$, kde T^n je množina uspořádaných n -tic čísel z tělesa zapsaných do sloupců, tj. $T^n = \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mid \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{n} \right\}$, kde $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Číslo α_i nazýváme i -tou složkou vektoru \vec{a} .

3. Operaci sčítání definujeme „po složkách“:

$$\text{Pro každé } \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n \text{ a } \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in T^n \text{ definujeme } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

4. Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po složkách“:

$$\text{Pro každé } \alpha \in T \text{ a každé } \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n \text{ definujeme } \alpha\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Úlohu nulového vektoru hraje vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opačným vektorem k $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ je vektor $\begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix}$.

Sami ověřte, že tato čtveřice $(T^n, T, +, \cdot)$ splní všechny axiomy, tedy T^n nad T s operacemi definovanými po složkách je vektorový prostor.

Poznámka 11. Značení T^n používáme jak pro množinu uspořádaných n -tic čísel z tělesa, tak pro vektorový prostor T^n , tedy čtveřici $(T^n, T, +, \cdot)$. Je třeba podle kontextu odlišit, o který případ jde.

Poznámka 12. Lze ztotožnit prostor T^1 a těleso T .

Příklad 2. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Nechť T je těleso.

2. Položme $V = T^{m,n}$, kde $T^{m,n}$ je množina uspořádaných mn -tic čísel z T zapsaných do tabulky o m řádcích a n sloupcích a nazývaných **matice typu** $m \times n$, tj.

$$T^{m,n} = \left\{ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m}, j \in \hat{n} \right\}.$$

a_{ij} nazýváme ij -tý **prvek** matice \mathbb{A} (značíme také $[\mathbb{A}]_{ij}$ nebo \mathbb{A}_{ij}), i -tým **řádkem** \mathbb{A} nazveme n -tici $(a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$ a j -tým **sloupcem** \mathbb{A} m -tici $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$. Číslo i říkáme **řádkový** a číslo j **sloupcový index prvku** a_{ij} .

3. Operaci sčítání definujeme „po prvcích“:

Pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$ a pro každé $i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$ definujeme

$$[\mathbb{A} + \mathbb{B}]_{ij} = [\mathbb{A}]_{ij} + [\mathbb{B}]_{ij}.$$

4. Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po prvcích“:

Pro každé $\alpha \in T$ a $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a pro každé $i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$ definujeme

$$[\alpha \mathbb{A}]_{ij} = \alpha [\mathbb{A}]_{ij}.$$

Úlohu nulového vektoru hraje nulová matice $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Opačným vektorem k $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ je $-\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

Sami ověřte, že čtveřice $(T^{m,n}, T, +, \cdot)$ splní všechny axiomy, tedy $T^{m,n}$ nad T s operacemi definovanými po prvcích je vektorový prostor, nazýváme jej **prostorem matic** (o m řádcích a n sloupcích).

Poznámka 13. Značení $T^{m,n}$ používáme pro množinu matic o m řádcích a n sloupcích s prvky z tělesa a pro vektorový prostor $T^{m,n}$, tedy čtveřici $(T^{m,n}, T, +, \cdot)$. Je třeba podle kontextu odlišit, o který případ jde.

Poznámka 14. Rozmyslete si, že prostory T^n a $T^{n,1}$ lze ztotožnit.

Poznámka 15. Pojem matice je v lineární algebře velmi důležitý. Podstatnou část lineární algebry bude tvořit maticový počet. Prozatím vystačíme s maticí jakožto vektorem z $T^{m,n}$, více se dozvíme v budoucnu.

Příklad 3. K pochopení tohoto příkladu je vhodné si přečíst Dodatek: Polynomy.

1. Nechť $T = \mathbb{C}$.

2. Nechť $V = \mathcal{P}$, což je množina všech polynomů.

3. Operaci sčítání vektorů definujeme „bodově“:

Pro každé $p, q \in \mathcal{P}$ definujeme $(p + q)(t) = p(t) + q(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

4. Operaci násobení vektoru komplexním číslem definujeme „bodově“:

Pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a $p \in \mathcal{P}$ definujeme $(\alpha p)(t) = \alpha p(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Úlohu nulového vektoru hraje nulový polynom \mathcal{O} definovaný $\mathcal{O}(t) = 0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Opačným vektorem k $p \in \mathcal{P}$ je opačný polynom definovaný $(-p)(t) = -p(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Sami ověřte, že čtveřice $(\mathcal{P}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ splní všechny axiomy, tedy \mathcal{P} nad \mathbb{C} s operacemi definovanými bodově je vektorový prostor, nazýváme jej **prostorem polynomů**.

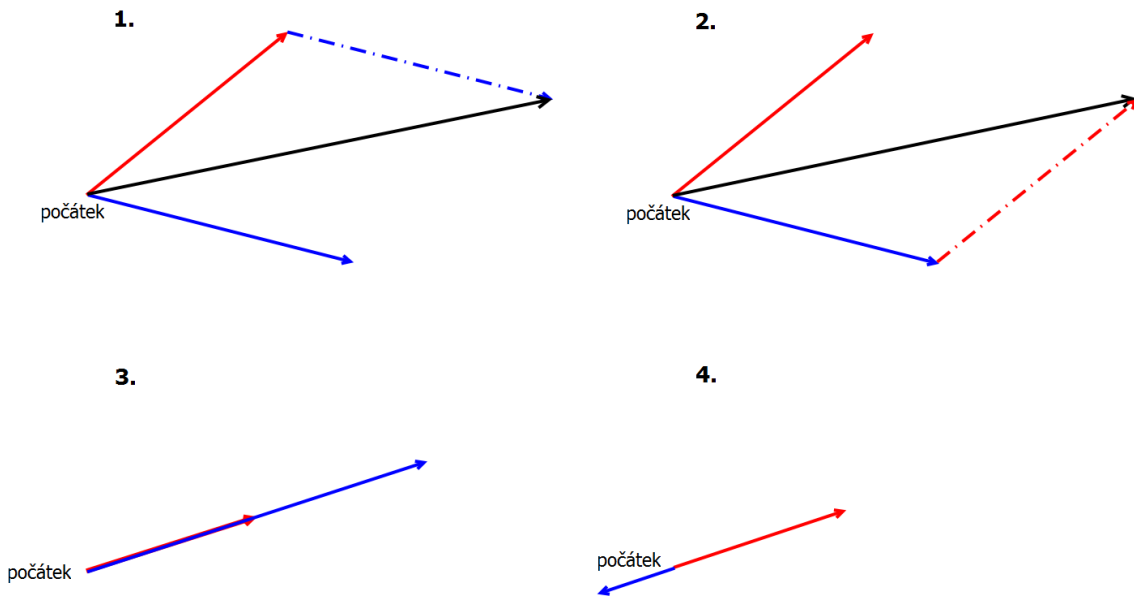
Příklad 4. Ponechme vše definované stejně jako v prostoru polynomů, pouze změníme množinu V . Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $V = \mathcal{P}_n$, což je množina polynomů stupně maximálně $n - 1$ s přidáním nulového polynomu (který nemá stupeň definovaný). Opět sami ověřte, že $(\mathcal{P}_n, \mathbb{C}, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad \mathbb{C} .

Poznámka 16. Snadno si rozmyslíme, že bez přidání nulového polynomu není \mathcal{P}_n definovaný výše vektorovým prostorem.

Příklad 5. Pro modelování prostorů \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 budeme používat orientované šipky. Vysvětleme vizualizaci \mathbb{R}^2 . V \mathbb{R}^3 postupujeme analogicky.

1. Tělesem jsou reálná čísla.
2. Vektoru $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ odpovídá šipka začínající v počátku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a končící v bodě $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, takové šipce se někdy říká průvodič bodu $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.
3. Součet $\vec{a} + \vec{b}$ se získá, když do koncového bodu šipky odpovídající \vec{a} umístíme počátek šipky rovnoběžné a stejně velké jako šipka odpovídající \vec{b} . Snadno si rozmyslíme, že takové sčítání odpovídá sčítání vektorů po složkách, jak jsme je zavedli ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^2 . Tím získáme koncový bod šipky odpovídající $\vec{a} + \vec{b}$.
4. $\alpha\vec{a}$ získáme tak, že velikost šipky odpovídající \vec{a} vynásobíme $|\alpha|$. Poté ji umístíme do počátku a orientaci nezměníme, pokud $\alpha \geq 0$, nebo změňme na opačnou, pokud $\alpha < 0$.

Snadno ověříme, že platí axiomy. Komutativní zákon ilustruje 1. a 2. bod obrázku 1.



Obrázek 1: **1.** Součet vektorů $\vec{a} + \vec{b}$, kde \vec{a} reprezentuje červená, \vec{b} modrá šipka a $\vec{a} + \vec{b}$ černá šipka. **2.** Součet vektorů $\vec{b} + \vec{a}$, kde \vec{a} reprezentuje červená, \vec{b} modrá šipka a $\vec{b} + \vec{a}$ černá šipka. **3.** $2\vec{a}$, kde \vec{a} reprezentuje červená a $2\vec{a}$ modrá šipka. **4.** $-\frac{1}{2}\vec{a}$, kde \vec{a} reprezentuje červená a $-\frac{1}{2}\vec{a}$ modrá šipka.

Poznámka 17. Rozmyslete si, že platí tvrzení:

Nechť V je vektorový prostor nad T a necht' T_1 je těleso splňující $T_1 \subset T$. Pak V je při zachování stejných operací také vektorovým prostorem nad T_1 . Například \mathbb{C}^n tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} , pokud jsou operace definovány po složkách. Pozor!! Jde o jiný vektorový prostor než \mathbb{C}^n nad \mathbb{C} . Pozor!! Naopak to neplatí, například \mathbb{R}^n při operacích definovaných po složkách netvoří vektorový prostor nad \mathbb{C} .

2 Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních algebraických rovnic (LAR) pro n neznámých nazveme každou soustavu tvaru

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

kde čísla a_{ij} a b_i pro $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{n}$ jsou obecně komplexní.

Názvosloví:

- Matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **maticí soustavy**.

- Matice

$$(\mathbb{A}|\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se nazývá **rozšířenou maticí soustavy**.

- Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ se nazývá **slopec pravých stran**.
- Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, pro nějž je soustava splněna, se nazývá **řešením soustavy**.
- Říkáme, že soustava je **homogenní** nebo **bez pravé strany**, pokud $\vec{b} = \vec{0}$.
- V opačném případě jde o **soustavu s pravou stranou**.

Poznámka 18. *Důležité je si uvědomit, že existují soustavy, jež řešení nemají. Například*

$$\begin{array}{ccc} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \end{array}.$$

A naopak existují soustavy, které mají řešení více. Například

$$\begin{array}{ccc} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & = & 10 \end{array}$$

má řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a také $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dokonce má nekonečně mnoho řešení.

Poznámka 19. *Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, a to řešení $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Toto*

*řešení nazýváme **triviálním**.*

V této kapitole se nebudeme učit hledat všechna řešení, ale budeme se zabývat dvěma trochu lehčími otázkami:

1. **Jak zjistit, zda je daná soustava řešitelná?**
2. **Jak najít alespoň jedno řešení?** (Samozřejmě za předpokladu, že soustava je řešitelná.)

Budeme převádět soustavu do tak jednoduchého tvaru, že z něj bude odpověď na tyto dvě otázky zřejmá. Důležité je, že úpravy budeme provádět tak, že nezměníme množinu řešení. Takovým úpravám se říká **ekvivalentní** a budeme používat tři takové úpravy:

1. záměna dvou rovnic,
2. přičtení násobku jiné rovnice k vybrané rovnici,
3. násobení rovnice číslem $\alpha \neq 0$.

Rozmyslete si, že takovými úpravami se skutečně množina řešení soustavy nemění. Dále si uvědomte, že místo abychom tyto úpravy prováděli s rovnicemi, můžeme je provádět přímo v rozšířené matici soustavy. Jde pak o úpravy:

1. záměna dvou řádků,
2. přičtení násobku jiného řádku k vybranému řádku,
3. násobení řádku číslem $\alpha \neq 0$.

Tyto úpravy budeme provádět s cílem dostat rozšířenou matici soustavy do tzv. horního stupňovitěho tvaru.

Definice 4. *Matice \mathbb{A} o m řádcích a $n + 1$ sloupcích s prvky a_{ij} , $i \in \widehat{m}$, $j \in \widehat{n+1}$, je v **horním stupňovitěm tvaru**, pokud existuje $\ell \in \widehat{m}$ a indexy k_1, k_2, \dots, k_ℓ takové, že $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\ell \leq n + 1$ a platí*

1. $a_{ik_i} \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{\ell}$,
2. $a_{ij} = 0$ pro každé $i \in \widehat{\ell}$ a $j < k_i$,
3. $a_{ij} = 0$ pro $i > \ell$, $j \in \widehat{n+1}$.

Matice v horním stupňovitěm tvaru má tedy tyto vlastnosti: V prvním řádku je první nenulový prvek ve sloupci k_1 , ve druhém řádku ve sloupci k_2 , až v ℓ -tém řádku ve sloupci k_ℓ . Od $(\ell + 1)$ -ního řádku počínaje jsou všechny řádky nulové.

Soustava s rozšířenou maticí v horním stupňovitěm tvaru má tedy tvar:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{1k_1}x_{k_1} & + & \dots & + & a_{1k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & a_{1k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{1(n+1)} \\ & & & & a_{2k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & a_{2k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & a_{2(n+1)} \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{\ell k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & a_{\ell n}x_n & = & a_{\ell(n+1)} \end{array}$$

Sloupce rozšířené matice soustavy s indexy k_1, k_2, \dots, k_ℓ nazýváme **hlavní sloupce**, ostatní sloupce nazýváme **vedlejší**.

Z poslední soustavy snadno vyčteme odpověď na řešené problémy.

1. Soustava je řešitelná, právě když sloupec pravých stran je vedlejší.

Je zřejmé, že když je sloupec pravých stran hlavní, tj. $k_\ell = n + 1$, má poslední rovnice tvar $0 = a_{\ell(n+1)}$, tedy nula má být rovna nenulovému číslu, což není možné. To, že soustava řešitelná je, když je sloupec pravých stran vedlejší, vyplývá z následujícího tvrzení.

2. Je-li sloupec pravých stran vedlejší, řešení soustavy nalezneme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbylé neznámé jednoznačně dopočítáme.

Je jasné vidět, že pokud jsou neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvoleny, dopočítáme z poslední rovnice x_{k_ℓ} , po dosazení do předposlední rovnice dopočítáme $x_{k_{\ell-1}}$ atd.

Poznámka 20. *Není těžké ověřit, že platí následující tvrzení. Soustava má jediné řešení, právě když má matice soustavy jen samé hlavní sloupce a sloupec pravých stran je vedlejší. Když totiž neexistují vedlejší sloupce, nelze žádné neznámé volit.*

Důsledkem pak je, že homogenní soustava má jen triviální řešení, právě když má matice soustavy jen hlavní sloupce.

Pokud má matice homogenní soustavy i vedlejší sloupce, pak při hledání netriviálního řešení je třeba zvolit alespoň jednu neznámou odpovídající vedlejším sloupci nenulovou.

Zbývá zodpovědět otázku: **Lze každou rozšířenou matici soustavy převést ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru?** Ano! Dokonce stačí 1. a 2. ekvivalentní řádková úprava. Například následujícím algoritmem:

- Prohlédáme první sloupec matice a nalezneme nenulový prvek. Odpovídající řádek zaměníme s prvním řádkem. Není-li v prvním sloupci nenulový prvek, postupujeme stejně s druhým sloupcem. Označíme k_1 index prvního sloupce, ve kterém najdeme nenulové číslo. Od 2. řádku počínaje odečteme takové násobky prvního řádku, abychom ve sloupci s indexem k_1 dostali nuly.
- Prohlédáváme další sloupce, které jsou na řadě, vždy od druhého řádku počínaje. Index prvního sloupce, v němž najdeme nenulový prvek, označíme k_2 . Odpovídající řádek zaměníme s druhým řádkem. Od třetího a dalších řádků odečítáme takové násobky druhého řádku, abychom vyrobili od třetího řádku počínaje ve sloupci s indexem k_2 samé nuly.
- Takto postupujeme tak dlouho, dokud jsou v prohledávaných sloupcích na potřebných místech nenulové prvky.

Příklad 6. *Zjistěte, zda je následující soustava řešitelná. Pokud ano, najděte jedno řešení.*

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & 3x_2 & & - & 2x_4 & = & 1 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} .$$

Řešení: *Odpovídající rozšířenou matici soustavy upravíme do horního stupňovitého tvaru:*

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 & \\ -4 & -2 & 5 & -9 & 0 & \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 & \\ 0 & 10 & 5 & -17 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & \end{array} \right) .$$

Soustava je řešitelná, protože sloupec pravých stran je vedlejší. Řešení najdeme volbou neznámé v jediném vedlejším sloupci, kterým je třetí sloupec. Zvolíme třeba $x_3 = 0$. Zbylé neznámé dopočítáme ze soustavy odpovídající matici v horním stupňovitém tvaru

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & 3x_2 & & - & 2x_4 & = & 1 \\ & & 10x_2 & + & 5x_3 & - & 17x_4 & = & 4 \\ & & & & & & 3x_4 & = & -1 \end{array} .$$

Dostáváme $x_4 = -1/3$, $x_2 = -1/6$, $x_1 = 5/6$. Řešením je tedy např. $\vec{x} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3 Lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze, souřadnice

Definice 5. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Uspořádanou n -tici $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme n -členným souborem. Součet souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ značíme $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i$ a definujeme

$$\sum_{i=1}^n \vec{x}_i = \left(\left(\left((\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3 \right) + \vec{x}_4 \right) + \dots + \vec{x}_n \right).$$

Poznámka 21.

Ujasněte si řádně rozdíl mezi pojmy soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, což je uspořádaná n -tice vektorů (členy souboru se mohou opakovat a záleží na jejich pořadí), a množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$, kde se prvky neopakují a nezáleží na jejich pořadí.

Příklad 7. Uvažujme prostor \mathbb{R}^2 , pak

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Poznámka 22. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V . Pak $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i$ je opět vektorem z V . To plyne z faktu, že s vektory provedeme konečný počet sčítání, přičemž každý mezisoučet je z V , tedy i výsledek je z V .

Věta 2 (Vlastnosti součtu souboru). Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ jsou soubory vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T .

1. Pro každé $k \in \widehat{n-1}$ platí $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n \vec{x}_i$ (**zobecněný asociativní zákon pro \oplus**).
Slovy: „ V součtu souboru nezáleží na uzavorkování“.
2. Pro každou permutaci (k_1, k_2, \dots, k_n) množiny \widehat{n} platí $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \vec{x}_{k_i}$ (**zobecněný komutativní zákon pro \oplus**).
Slovy: „ V součtu souboru nezáleží na pořadí vektorů“.
3. Pro každé $\alpha \in T$ platí $\alpha \sum_{i=1}^n \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha \vec{x}_i$ (**zobecněný distributivní zákon pro \odot vzhledem ke sčítání vektorů**),
4. $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i + \sum_{i=1}^n \vec{y}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{x}_i + \vec{y}_i)$.

*Důkaz. ****

1. Nechť $n = 2$, pak $k = 1$ a $\sum_{i=1}^2 \vec{x}_i = \sum_{i=1}^1 \vec{x}_i + \sum_{i=2}^2 \vec{x}_i = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, tedy zákon platí. Předpokládejme, že pro nějaké $n \geq 2$ a pro každý soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ a pro každé $k \in \widehat{n-1}$ platí

$$\sum_{i=1}^n \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n \vec{x}_i.$$

Uvažujme nyní libovolný $(n+1)$ -členný soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1})$. Pokud $k = n$, pak rovnost $\sum_{i=1}^{n+1} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i + \vec{x}_{n+1}$ platí podle definice součtu souboru. Pokud $k < n$, pak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \vec{x}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{x}_i + \vec{x}_{n+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n \vec{x}_i \right) + \vec{x}_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^k \vec{x}_i + \left(\sum_{i=k+1}^n \vec{x}_i + \vec{x}_{n+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} \vec{x}_i, \end{aligned}$$

kde první rovnost platí podle definice součtu souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, druhá rovnost podle indukčního předpokladu, třetí rovnost je asociativní zákon z axiomů vektorového prostoru a poslední rovnost platí podle definice součtu souboru $(\vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \dots, \vec{x}_{n+1})$.

2. Dokažte sami.
3. Dokažte sami.
4. Dokažte sami.

□

Definice 6. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V . Říkáme, že vektor \vec{x} je **lineární kombinací (LK)** souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, pokud existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

Čísla $\alpha_i, i \in \hat{n}$, nazýváme **koeficienty LK**.

1. Jestliže $\alpha_i = 0$ pro všechna $i \in \hat{n}$, nazýváme takovou LK **triviální**.
2. V opačném případě (tj. když existuje index $i_0 \in \hat{n}$ tak, že $\alpha_{i_0} \neq 0$) jde o **netriviální LK**.

Poznámka 23. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V . Pak libovolná LK $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je opět vektorem z V (definice LK má tedy dobrý smysl). To plyne z faktu, že každý sčítanec $\alpha_i \vec{x}_i$ je součinem čísla a vektoru, tedy vektorem z V , a součet souboru je z V podle Poznámky 22.

Poznámka 24. Někdy užijeme slovního spojení „vektor \vec{x} je LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ “ místo „vektor \vec{x} je LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ “. Obě vyjádření mají stejný význam.

Poznámka 25. Rozmyslete si, že výsledkem triviální LK je nulový vektor.

Definice 7. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V . Množinu všech LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme **lineárním obalem (LO)** souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ a značíme ji $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, tj.

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \mid \text{pro každé } i \in \hat{n} \text{ je } \alpha_i \in T \right\}.$$

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazýváme **generátory LO**.

Věta 3 (Vlastnosti LO). Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ jsou vektory z V . Pak platí:

1. $\vec{0} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
2. Jestliže (k_1, k_2, \dots, k_n) je permutace množiny \hat{n} , pak platí $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_{k_1}, \vec{x}_{k_2}, \dots, \vec{x}_{k_n}]_\lambda$.
Slovy: „LO nezávisí na pořadí generátorů“.
3. Pokud $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak platí $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.
Slovy: „generátor, který je LK ostatních generátorů, lze z LO vyhodit a také do LO přihodit, aniž by se LO změnil“.
4. Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
Slovy: „LO je uzavřený na sčítání vektorů“.
5. Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\alpha \vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
Slovy: „LO je uzavřený na násobení vektoru číslem z T “.

6. $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T při zachování operací z V .

Důkaz. 1. Vyplývá z rovnosti $\vec{0} = \sum_{i=1}^n 0\vec{x}_i$.

2. Tvrzení plyne z rovnosti

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{k_i} \vec{x}_{k_i},$$

kteřá je důsledkem zobecněného komutativního zákona.

3. Rovnost dvou množin se v matematice obvykle dokazuje tak, že se dokáží dvě inkluze. Budeme postupovat také tak.

- (a) Dokážeme nejprve, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, tj. pro libovolný vektor $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ ukážeme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$. Necht' $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Potom ale také platí, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + 0\vec{x}_{n+1}$, a to opět podle definice LO znamená, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.
- (b) Zbývá dokázat, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, tj. pro libovolný vektor $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$ ukážeme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Necht' $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, pak podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i$. Upravme rovnost následovně

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \vec{x}_{n+1}. \quad (2)$$

Teprve nyní využijeme předpoklad, že $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. To podle definice LO znamená, že existují čísla $\beta_1, \dots, \beta_n \in T$ taková, že $\vec{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$. Odtud upravíme rovnost (2) následovně

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_{n+1} \beta_i) \vec{x}_i.$$

V poslední úpravě jsme využili Větu 2 o vlastnostech součtu souboru a axiomů vektorového prostoru. Podle definice LO vidíme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

4. Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ a $\beta_1, \dots, \beta_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \quad \text{a} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i.$$

Odtud dostáváme díky Větě 2 o vlastnostech součtu souboru a axiomům vektorového prostoru, že

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i,$$

což podle definice LO znamená, že $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

5. Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

Pak platí díky Větě 2 o vlastnostech součtu souboru a axiomům vektorového prostoru, že

$$\alpha \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) \vec{x}_i,$$

což podle definice LO znamená, že $\alpha \vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

6. Z předchozích dvou bodů víme, že LO je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem z T při zachování operací z V . Zbývá ověřit platnost 8 axiomů vektorového prostoru.

- Jelikož V je vektorový prostor, je jasné, že $\vec{0} \in V$ splňuje pro každý $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset V$ rovnost

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}.$$

A jelikož podle 1. vlastnosti LO patří $\vec{0}$ do $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, dokázali jsme tím platnost 3. axiomu o existenci nulového vektoru v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

- Jelikož V je vektorový prostor, je jasné, že pro každý $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset V$ leží ve V i $-\vec{x}$ splňující rovnost

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$$

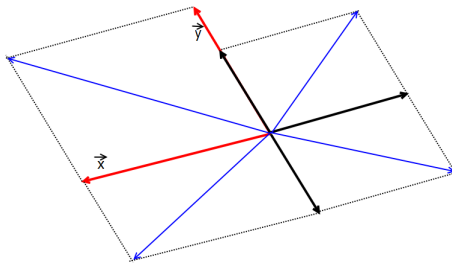
A jelikož podle Věty 1 platí, že $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$, a podle 5. vlastnosti LO (uzavřenost LO na násobení číslem z T) patří $(-1)\vec{x}$ do $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, dokázali jsme tím platnost 4. axiomu o existenci opačného vektoru ke každému vektoru z $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

- Všechny ostatní axiomy jsou splněny pro všechny vektory z V , tím spíše jsou splněny pro všechny vektory z $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset V$.

□

Příklad 8. *Rozmyslete si, jak vypadají LO v \mathbb{R}^2 .*

1. $[(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})]_\lambda$ je jediný bod $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$.
2. $[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$, je přímka. Obsahuje totiž právě všechny možné reálné násobky vektoru \vec{x} .
3. $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde \vec{x} a \vec{y} neleží v jedné přímce, je celá rovina \mathbb{R}^2 . K důkazu, že každý vektor z \mathbb{R}^2 lze psát jako LK (\vec{x}, \vec{y}) , použijte vizualizaci \mathbb{R}^2 pomocí šipek.



Obrázek 2: Ukázka, jak různé vektory z \mathbb{R}^2 (vyznačeny modře) získáváme jako LK (\vec{x}, \vec{y}) (vyznačeny červeně).

3.1 Lineární závislost a nezávislost

Definice 8. *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T . Řekneme, že soubor je*

1. **lineárně nezávislý (LN)**, pokud

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T) \left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \right) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0) \right),$$

slovy: „jedině triviální LK kombinace souboru dává nulový vektor“,

2. **lineárně závislý** (LZ) v opačném případě, tj. pokud platí negace předchozího výroku

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T) \left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \right) \wedge (\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0) \right),$$

slovy: „existuje netriviální LK souboru rovná nulovému vektoru“.

Věta 4 (Vlastnosti LN a LZ souborů). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Pak platí:*

1. (\vec{x}_1) je LZ $\Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{0}$.
2. Pokud soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ obsahuje $\vec{0}$, pak je LZ.
3. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ $\Leftrightarrow (\vec{x}_{k_1}, \vec{x}_{k_2}, \dots, \vec{x}_{k_n})$ je LZ, kde (k_1, \dots, k_n) je libovolná permutace \hat{n} .
Slovy: „LZ souboru nezávisí na pořadí vektorů v souboru“.
4. Pokud $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LN, pak pro každé $k \in \hat{n}$ platí $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ je LN.
Slovy: „vyhodíme-li z LN souboru vektory, zůstane LN“.
5. Je-li $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$, pak $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ.
Slovy: „přidáme-li do LZ souboru vektory, zůstane LZ“.
6. „Alternativní definice LZ“
Nechť $n \geq 2$. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ $\Leftrightarrow (\exists i_0 \in \hat{n})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$.
Slovy: „v alespoň 2-prvkovém LZ souboru existuje vektor, který je LK ostatních“.
7. „Alternativní definice LZ“
 $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ $\Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{0}$ nebo $(\exists i_0 \in \{2, \dots, n\})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda)$.
Slovy: „v LZ souboru je první vektor nulový nebo existuje vektor, který je LK předchozích“.

Důkaz. 1. Ukazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

(\Rightarrow): Předpokládáme, že (\vec{x}_1) je LZ. Podle definice existuje $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, takové, že $\alpha \vec{x}_1 = \vec{0}$. Podle Věty 1 pak máme $\vec{x}_1 = \vec{0}$.

(\Leftarrow): Předpokládáme, že $\vec{x}_1 = \vec{0}$. Potom $1\vec{x}_1 = \vec{0}$, což je netriviální LK (\vec{x}_1) rovná $\vec{0}$, proto podle definice je (\vec{x}_1) LZ.

2. Nechť $\vec{x}_i = \vec{0}$ pro nějaké $i \in \hat{n}$, pak tvrzení plyne z rovnosti

$$\vec{0} = 0\vec{x}_1 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + 0\vec{x}_n,$$

tedy z faktu, že $\vec{0}$ dostaneme jako netriviální LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, kde v LK jsou všechny koeficienty kromě i -tého rovny 0 a i -tý klademe roven 1, a tedy soubor je LZ.

3. Tvrzení plyne z rovnosti

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{k_i} \vec{x}_{k_i},$$

která je důsledkem zobecněného komutativního zákona. Jakmile je na jedné straně netriviální LK dávající $\vec{0}$, pak i na druhé straně je netriviální LK dávající $\vec{0}$.

4. Dokažme tvrzení sporem. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LN a zároveň $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ je LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$. Pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in T$ alespoň jedno nenulové taková, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$. Pak ale také platí $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n 0\vec{x}_i$, což je netriviální LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ dávající $\vec{0}$, a tedy máme spor s LN $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

5. Toto tvrzení plyne z předchozího užitím faktu, že když platí implikace $A \Rightarrow B$, tak platí také implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$.

6. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

(\Rightarrow) : Předpokládáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ, tedy podle definice existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že alespoň jedno z nich je nenulové (označme je α_{i_0}) a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Odtud dostaneme $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} = -\sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i \vec{x}_i$. A na závěr máme

$$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n (-\alpha_i / \alpha_{i_0}) \vec{x}_i.$$

Tedy podle definice LO dostáváme $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

(\Leftarrow) : Předpokládejme, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

Odtud dostáváme $\sum_{i=1, i \neq i_0}^n (-\alpha_i) \vec{x}_i + 1 \vec{x}_{i_0} = \vec{0}$, což je netriviální LK $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ rovná $\vec{0}$, proto $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ.

7. Opět dokazujeme dvě implikace.

(\Rightarrow) : Necht $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ, pak samozřejmě \vec{x}_1 může být nulový. Ošetřeme ještě případ, kdy $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$. Pak z definice LZ plyne, že existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$ a alespoň jedno z čísel je nenulové. Označme $i_0 = \max\{i \in \hat{n} \mid \alpha_i \neq 0\}$. Množina vpravo je neprázdná, protože aspoň jedno z čísel α_i je nenulové. Navíc $i_0 \geq 2$. Kdyby totiž $i_0 = 1$, pak by $\alpha_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$, což je spor s Větou 1, podle které plyne z $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, že $\alpha_1 = 0$. Odtud dostáváme $\vec{0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \vec{x}_i$. Dále máme $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} = -\sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ a na závěr $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} (-\alpha_i / \alpha_{i_0}) \vec{x}_i$. Což podle definice LO znamená, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda$. (\Leftarrow) : Necht $\vec{x}_1 = \vec{0}$, pak podle 2. vlastnosti této věty je soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ LZ. Druhá možnost je, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ pro nějaké $i_0 \geq 2$. Pak platí $\vec{0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i + (-1) \vec{x}_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^n 0 \vec{x}_i$, což je netriviální LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, který je tedy LZ. \square

Příklad 9. Rozmyslete si, že soubor dvou vektorů (\vec{x}, \vec{y}) je LZ $\Leftrightarrow (\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha \vec{y} \vee \vec{y} = \alpha \vec{x})$.

3.2 Báze a dimenze

Definice 9. Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T . Necht $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Pak říkáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je **soubor generátorů (generující soubor)** V . Říkáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ **generuje** V .

Poznámka 26. V případě LO už jsme generátory zaváděli, nazývali jsme tak pro LO $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Nyní vidíme, že chápeme-li LO jako vektorový prostor, pak jsme v souladu s novou definicí.

Definice 10. Necht $n \in \mathbb{N}$. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ splňuje 2 podmínky

1. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LN,
2. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ generuje V .

Pak $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme **bází** V .

Poznámka 27. $V = \{\vec{0}\}$ bázi nemá, protože v něm neexistuje LN soubor.

Příklad 10. Rozhodněte o LN či LZ souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ z \mathbb{R}^4 .

1.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zjišťujeme, zda rovnice $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \alpha_4\vec{x}_4 = \vec{0}$ má jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (pak je soubor podle definice LN) nebo zda existuje netriviální řešení, tedy alespoň jedno z $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ (pak je soubor podle definice LZ). Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \end{aligned}.$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice v horním stupňovitém tvaru má samé hlavní sloupce. Z kapitoly Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic pak víme, že v takovém případě existuje jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. To jest, dokázali jsme, že soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ je LN.

2.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zjišťujeme, zda rovnice $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \alpha_4\vec{x}_4 = \vec{0}$ má jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (pak je soubor podle definice LN) nebo zda existuje netriviální řešení, tedy alespoň jedno z $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ (pak je soubor podle definice LZ). Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 1\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \end{aligned}.$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice v horním stupňovitém tvaru má poslední sloupec vedlejší. Z kapitoly Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic pak víme, že netriviální řešení získáme, když za neznámou odpovídající vedlejšímu sloupci zvolíme nenulové číslo, například $\alpha_4 = 1$, a ostatní neznámé dopočítáme. Dostáváme $\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = -1$. To jest, zjistili jsme, že $(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}$. Tedy máme netriviální LK soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ rovnou $\vec{0}$, což znamená, že soubor je LZ. Ze vztahu $(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}$ dále vidíme, že $\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$, tedy podle 3. vlastnosti LO máme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. Označme $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$ (z teorie víme, že jde o vektorový prostor). Jelikož z matice soustavy výše uvedené, vyškrtáme-li poslední sloupec, vidíme, že po ekvivalentních řádkových úpravách zůstanou v matici v horním stupňovitém tvaru pouze hlavní sloupce, zjišťujeme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je LN generující soubor V , je to tedy báze.

Dalším důležitým pojmem je dimenze, která (jak uvidíme zanedlouho) s bází úzce souvisí.

Definice 11. Nechť $V \neq \{\vec{0}\}$ je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že jsou splněny 2 podmínky

1. ve V existuje n -členný LN soubor,
2. každý $(n+1)$ -členný soubor z V je LZ,

pak říkáme, že **dimenze** V je konečná a rovna n a píšeme $\dim V = n$. V opačném případě říkáme, že dimenze V je nekonečná a píšeme $\dim V = +\infty$. Pro nulový vektorový prostor klademe $\dim V = 0$.

Poznámka 28. Rozeberme si, kdy je $\dim V = +\infty$, tj. kdy V nemá konečnou dimenzi. Opačný případ ve výše uvedené definici znamená negaci výroku, tedy: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je buď každý n -členný soubor ve V LZ, nebo existuje $(n+1)$ -členný LN soubor. Jelikož $V \neq \{\vec{0}\}$, je jasné, že ne každý 1-členný soubor je LZ, potom ale, má-li negace výroku platit, dostáváme, že existuje 2-členný LN soubor ve V . Poté protože ne každý 2-členný soubor je LZ, dostáváme, že existuje 3-členný LN soubor atd. Neboli nekonečná dimenze znamená, že ve V existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ n -členný LN soubor.

Příklad 11. Uvažujme prostor \mathbb{R}^4 . Nechť $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. V je LO, tedy je sám

o sobě vektorovým prostorem. Snadno nahlédneme, že $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je jeho báze,

protože jde o LN a generující soubor. Ve V tedy existuje 3-členný LN soubor, zatím tedy víme, že $\dim V \geq 3$. Abychom dokázali, že $\dim V = 3$, museli bychom ověřit, že každý 4-členný soubor z V už je LZ. Následující věta nám tuto práci ušetří.

Věta 5 (Steinitzova věta o výměně, 1913). Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LN soubor vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T . Nechť dále soubor $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ vektorů z V splňuje, že pro každé $i \in \hat{n}$

$$\vec{x}_i \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda.$$

Pak platí:

1. $m \geq n$,
2. existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \dots, i_n \in \hat{m}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_n\})]_\lambda.$$

Poznámka 29.

Z 1. bodu Steinitzovy věty plyne, že počet členů LN souboru ve vektorovém prostoru nepřekročí počet generátorů tohoto prostoru.

2. bod věty říká, že v LO existují generátory, které lze nahradit LN vektory (zápis na pravé straně tedy znamená, že z LO byly vyhozeny generátory $\vec{y}_{i_1}, \vec{y}_{i_2}, \dots, \vec{y}_{i_n}$), proto věta o výměně. Věta ale neříká, které z generátorů máme vyhodit.

Důkaz. *** Nejprve dokážeme **pomocné tvrzení**:

Pro každé $k \in \min\{m, n\}$ existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{m}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda.$$

Důkaz provedeme indukcí podle k .

- Pro $k = 1$ chceme dokázat, že existuje index $i_1 \in \hat{m}$ takový, že $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1\})]_\lambda$. Z faktu, že $\vec{x}_1 \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ plyne

1. užitím Věty 3 o vlastnostech LO, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda, \quad (3)$$

2. užitím Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů, že $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ je LZ soubor.

Dále užitím Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů) dostaneme, že některý z y -ových vektorů je LK předchozích (využili jsme faktu, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, protože náleží LN souboru), tj. existuje index $i_1 \in \hat{m}$ takový, že $\vec{y}_{i_1} \in [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{i_1-1}]_\lambda$. Odtud z Věty 3 o vlastnostech LO plyne, že \vec{y}_{i_1} lze z $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ vyhodit, aniž by se LO změnil, tedy $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1\})]_\lambda$. A na závěr podle (3) máme $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1\})]_\lambda$.

- Necht' pro $1 \leq k < \min\{m, n\}$ existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{m}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda.$$

Dokážeme, že pak existuje index $i_{k+1} \in \hat{m}$ různý od předchozích i_1, \dots, i_k takový, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\})]_\lambda.$$

Z faktu, že $\vec{x}_{k+1} \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda$ plyne

1. užitím Věty 3 o vlastnostech LO, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda, \quad (4)$$

2. užitím Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}))$ je LZ soubor.

Dále užitím Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů) dostaneme, že některý z y -ových vektorů (jeho index označíme i_{k+1}) je LK předchozích vektorů v souboru (využili jsme faktu, že soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1})$ je LN, a tedy $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a také žádný z vektorů \vec{x}_i není LK předchozích vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}$), tj. z Věty 3 o vlastnostech LO plyne, že $\vec{y}_{i_{k+1}}$ lze z $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda$ vyhodit, aniž by se LO změnil. A na závěr podle (4) máme $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\})]_\lambda$.

Dokažme 1. bod Steinitzovy věty. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že $n > m$. Pak ale podle pomocného tvrzení existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \dots, i_m \in \hat{m}$ (což jsou ale tedy nutné všechna čísla z množiny \hat{m}) takové, že $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\})]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda$, kde poslední rovnost plyne z faktu, že $\hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\} = \emptyset$. Jelikož je $n > m$, plyne z předpokladů věty, že $\vec{x}_{m+1} \in [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda$, tím jsme ale dostali spor s LN souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1})$ podle Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů).

S užitím právě dokázaného 1. bodu Steinitzovy věty víme, že $\min\{m, n\} = n$. Tedy 2. bod Steinitzovy věty dostaneme z pomocného tvrzení dosazením $k = n$. \square

Příklad 12. *Návrat k příkladu v \mathbb{R}^4 , kde vyšetřujeme dimenzi $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.*

Již víme, že $\dim V \geq 3$. Jelikož V má 3-členný generující soubor, Steinitzova věta tvrdí, že LN soubory ve V mají maximálně 3 členy, a tedy každý 4-členný soubor je LZ. To už podle definice dimenze znamená, že $\dim V = 3$.

Steinitzova věta umožňuje zavést alternativní definici dimenze, která dává do souvislosti pojem dimenze a báze.

Věta 6 (Alternativní definice dimenze). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Pak $\dim V = n$ tehdy a jen tehdy, když ve V existuje n -členná báze.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

(\Rightarrow): Nechť $\dim V = n$, pak ve V existuje podle definice dimenze n -členný LN soubor, označme jej $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. Ukážeme, že tento soubor je bází, tedy že $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Kdyby soubor negeneroval V , tedy $V \not\subseteq [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak by ve V existoval vektor $\vec{x}_{n+1} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Potom by ale soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1})$ byl LN, což je spor s $\dim V = n$.

Že by soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1})$ byl LN, lze ukázat užitím Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů): jelikož je soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ LN, platí $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a pro každé $i \in \hat{n}$ platí, že \vec{x}_i není LK předchozích vektorů ze souboru, a zároveň ani \vec{x}_{n+1} není LK souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

(\Leftarrow): Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V , pak ve V existuje n -členný LN soubor (jelikož $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je LN). Protože $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je také generující soubor, plyne z 1. bodu Steinitzovy věty, že každý LN soubor má maximálně n členů, a tedy každý $(n+1)$ -členný soubor je LZ. Tím je podle definice dokázáno, že $\dim V = n$. \square

Důsledek 1 (Důsledky Steinitzovy věty). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n$. Pak platí:*

1. Každá báze V je n -členná.
2. Každý n -členný LN soubor ve V už generuje V , a je tedy bází V .
3. Každý n -členný soubor generátorů V už je LN, a je tedy bází V .

Důkaz. 1. Víme, že ve V existuje n -členná báze. Označme ji $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Nechť $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je jiná báze V . Jelikož $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor generátorů V a $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je LN soubor ve V , je podle 1. bodu Steinitzovy věty $n \geq m$. Obdobně, protože $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je soubor generátorů V a $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je LN soubor ve V , platí opět podle 1. bodu Steinitzovy věty, že také $m \geq n$.

2. Viz důkaz 1. implikace ve Větě 6 o alternativní definici dimenze.

3. Kdyby n -členný soubor generátorů nebyl LN, šlo by z jeho obalu vyhodit některý z vektorů, aniž by se obal změnil. Pak by ale V byl generován $n-1$ vektory, což by podle Steinitzovy věty znamenalo, že LN soubory ve V mají maximálně $n-1$ členů, a tedy všechny n -členné jsou LZ. A to je spor s $\dim V = n$. \square

Poznámka 30. Možná se divíte, proč jsme pro definici dimenze nepoužili hned na začátku definici alternativní (tedy pomocí báze). Taková definice by ale potřebovala ověřit korektnost - tedy fakt, že když ve V někdo najde bázi o 10 členech a prohlásí, že dimenze je 10, nestane se, že by někdo jiný našel bázi o jiném počtu členů. Fakt, že všechny báze mají stejný počet členů se snadno ověří pomocí Steinitzovy věty. Zkuste sami rozmyslet, jak byste jej ověřili bez použití Steinitzovy věty. Původní definice dimenze je tedy sice techničtější, ale nevyžaduje dodatečné ověření korektnosti.

Příklad 13. Uved'me, jak vypadají báze a dimenze nejznámějších vektorových prostorů.

1. V T^n nazýváme standardní bázi soubor $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, kde

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že soubor \mathcal{E} je LN. Dále \mathcal{E} generuje V , protože každý vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$ lze psát jako $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$. Proto $\dim T^n = n$.

2. V prostoru matic $T^{m,n}$ (o m řádcích a n sloupcích) nazýváme standardní bázi soubor $(\mathbb{E}_{1,1}, \mathbb{E}_{1,2}, \dots, \mathbb{E}_{m,n})$, kde pro každé $i \in \hat{n}$ a každé $j \in \hat{n}$ je $\mathbb{E}_{i,j}$ matice, která má m řádků, n sloupců, prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci je roven jedné a všechny ostatní prvky jsou nulové. Tedy například $\mathbb{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$. Podobně jako v předchozím příkladě nahlédneme, že jde o LN soubor generátorů, tentokrát o mn členech, proto $\dim T^{m,n} = mn$.

3. V prostoru \mathcal{P}_n polynomů stupně maximálně $n-1$ s přidáním nulového polynomu nazýváme standardní bázi soubor (e_1, e_2, \dots, e_n) , kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ jsou polynomy e_1, e_2, \dots, e_n definovány

$$e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2, \dots, e_n(t) = t^{n-1}.$$

Vysvětleme, že takový soubor je generující. Bereme-li libovolný polynom $p \in \mathcal{P}_n$, pak existují komplexní čísla $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ taková, že pro každé $t \in \mathbb{C}$

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} = \alpha_0 e_1(t) + \alpha_1 e_2(t) + \alpha_2 e_3(t) \dots + \alpha_{n-1} e_n(t),$$

tj.

$$p = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \dots + \alpha_{n-1} e_n,$$

neboli $p \in [e_1, e_2, \dots, e_n]_\lambda$. LN souboru ověříme z definice LN. Předpokládáme-li, že $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n = \mathcal{O}$ (nulový polynom), znamená to, že polynom vlevo má pro všechna $t \in \mathbb{C}$ tvar $\beta_1 + \beta_2 t + \dots + \beta_n t^{n-1}$. Jelikož jde o nulový polynom, všechny koeficienty $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ jsou nutně nulové, a tím je dokázána LN. Jelikož má \mathcal{P}_n n -člennou bázi, je $\dim \mathcal{P}_n = n$ (tedy značení \mathcal{P}_n je voleno právě tak, aby n odpovídalo dimenzi).

4. V prostoru \mathcal{P} všech polynomů je pro každé n soubor (e_1, e_2, \dots, e_n) definovaný stejně jako v předchozím bodě LN, proto $\dim \mathcal{P} = +\infty$.

Podívejme se, jak lze z báze komplexního vektorového prostoru získat bázi reálného vektorového prostoru.

Věta 7 (Báze nad \mathbb{C} a nad \mathbb{R}). *** Necht' V je vektorový prostor nad \mathbb{C} a $\dim V = n \in \mathbb{N}$, necht' $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V , pak $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, \dots, i\vec{x}_n)$ je báze $V_{\mathbb{R}}$, čímž značíme V nad \mathbb{R} , kde je operace sčítání zachována a operace násobení zúžena na $\mathbb{R} \times V$. Tedy $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$.

Důkaz. Ověříme, že jde o LN a generující soubor.

1. LN: Uvažujme libovolnou LK souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, \dots, i\vec{x}_n)$ s reálnými koeficienty, tj. $\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k (i\vec{x}_k) = \vec{0}$, pak $\sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) \vec{x}_k = \vec{0}$. Z LN souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ ve V nad \mathbb{C} plyne, že $\alpha_k + i\beta_k = 0$ pro každé $k \in \hat{n}$. Nulová tedy musí být reálná i imaginární část komplexních čísel $\alpha_k + i\beta_k$, tj. $\alpha_k = \beta_k = 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.
2. Soubor generuje $V_{\mathbb{R}}$: Necht' $\vec{x} \in V$. Jelikož $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ generuje V nad \mathbb{C} , existují čísla $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\vec{x} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \vec{x}_k$. Rozepišme nyní komplexní čísla pomocí jejich reálné a imaginární části, tj. $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$. Pak

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) \vec{x}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^n (i\beta_k) \vec{x}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k (i\vec{x}_k).$$

Tedy jsme \vec{x} zapsali jako LK souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, \dots, i\vec{x}_n)$ pomocí reálných koeficientů. □

Steinitzova věta má ještě další dva důležité důsledky. Zformulujeme je ve tvaru vět.

Věta 8 (O výběru báze ze souboru generátorů). *Necht' $n \in \mathbb{N}$ a necht' V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n$. Necht' $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_{\lambda} = V$. Pak existují indexy $i_1, i_2, \dots, i_n \in \hat{m}$ takové, že $(\vec{y}_{i_1}, \vec{y}_{i_2}, \dots, \vec{y}_{i_n})$ tvoří bázi V .*

Důkaz. • Příklad $m < n$ podle Steinitzovy věty nenastává.

- Je-li $m = n$, pak podle 3. důsledku Steinitzovy věty je $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ bázi V .
- Je-li $m > n$, pak je soubor $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ LZ a podle Alternativní definice LZ (6. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů) lze z $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_{\lambda}$ vyhodit jeden z generátorů, aniž by se obal změnil.
- Je-li $m - 1 = n$, pak je soubor získaný z původního vyhozením jednoho vektoru hledanou bázi.
- Je-li $m - 1 > n$, pak pokračujeme analogicky. □

Příklad 14. Uvažujme \mathbb{R}^4 . Necht' $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_{\lambda}$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vyberte ze souboru generátorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ bázi P .

Řešení: Postupujeme jako při vyšetřování LN a LZ, tedy vytvoříme matici, jejímiž sloupci jsou generátory P . V LO nezáleží na pořadí vektorů, dáme je tedy do matice tak, aby se nám co nejlépe převáděla na horní stupňovitý tvar.

$$(\vec{x}_2 \vec{x}_3 \vec{x}_1 \vec{x}_4) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že 3. a 4. sloupec jsou vedlejší, tedy jim odpovídající vektory jsou LK předchozích. Konkrétně $\vec{x}_1 = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3$ a $\vec{x}_4 = -\vec{x}_2 + \vec{x}_3$. Proto lze vektory \vec{x}_1 a \vec{x}_4 z LO vyhodit, aniž by se změnil, tj. $P = [\vec{x}_2, \vec{x}_3]_{\lambda}$. Z matice také vidíme, že vektorům \vec{x}_2 a \vec{x}_3 odpovídají hlavní sloupce, jsou tedy LN a tvoří hledanou bázi. Báze není jediná možná. Z horního stupňovitého tvaru vyčtete snadno, že například (\vec{x}_1, \vec{x}_2) nebo (\vec{x}_2, \vec{x}_4) jsou také báze P .

Věta 9 (O doplnění LN souboru na bázi). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a necht' V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n$. Necht' $k \in \hat{n}$ a $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je LN soubor ve V . Pak existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n)$ je bázi V .*

Důkaz. Podle Věty 6 (Alternativní definice dimenze) existuje ve V n -členná báze $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$. Užitím Steinitzovy věty (jen pozor na to, že m ze Steinitzovy věty je nyní n a n ze Steinitzovy věty je nyní k) víme, že existují indexy $i_1, \dots, i_k \in \hat{n}$ takové, že $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} - \{i_1, \dots, i_k\})]_\lambda$. Jelikož je soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} - \{i_1, \dots, i_k\}))$ n -členný generující soubor V , jde podle 3. důsledku Steinitzovy věty o bázi. \square

Příklad 15. *Doplňte (\vec{x}_1, \vec{x}_2) na bázi \mathbb{R}^4 , je-li*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: *Uvažujme standardní bázi \mathbb{R}^4 a v ní dva vektory nahradíme vektory \vec{x}_1 a \vec{x}_2 (to jistě půjde, neboť \vec{x}_1 a \vec{x}_2 nejsou jeden násobkem druhého, a tedy jsou LN). Jistě platí*

$$\mathbb{R}^4 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Vyhodíme z LO nadbytečné vektory a zůstane nám hledaná báze. Už dopředu víme, že bude 4-členná, protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Převedli jsme tedy úlohu na problém vybrat bázi ze souboru generátorů, viz Příklad 14. Vytvoříme tedy matici, jejímiž sloupci jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Z matice v horním stupňovitém tvaru pak vyčteme, které vektory jsou LK předchozích a lze je z LO vyhodit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vidíme, že \vec{e}_2 a \vec{e}_3 odpovídají vedlejším sloupcům, a jsou proto LK předchozích a lze je tedy z LO vyhodit, aniž by se změnil. Konkrétně $\vec{e}_2 = -\vec{x}_1 + 2\vec{e}_1$ a $\vec{e}_3 = -2\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 4\vec{e}_1$. Proto $\mathbb{R}^4 = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4]_\lambda$. Podle 3. důsledku Steinitzovy věty je 4-členný soubor generátorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$ LN, a tedy jde o hledanou bázi. Rozmyslete si, že je důležité napsat si v matici dopředu ty vektory, které má hledaná báze obsahovat!

3.3 Souřadnice

Věta 10 (Jednoznačnost vyjádření vektoru pomocí LK báze). *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T . Pak pro každý vektor $\vec{x} \in V$ existuje právě jedna uspořádaná*

n -tice $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$.

Důkaz. • Existence takového vektoru $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ plyne z faktu, že $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

• Jednoznačnost dokážeme sporem. Necht' $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ jsou dvě různé n -tice splňující $\vec{x} =$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$. Pak ale $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \vec{x}_i = \vec{0}$ a přitom jde o netriviální LK, protože jistě pro některý index $i_0 \in \hat{n}$ je $\alpha_{i_0} - \beta_{i_0} \neq 0$. To je spor s LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. \square

Definice 12. Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T .

1. Necht $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Pak α_i nazveme **i -tá souřadnice vektoru \vec{x} v bázi \mathcal{X}** .
2. Necht $i \in \hat{n}$. Zobrazení $\vec{x}_i^\# : V \rightarrow T$, které vektoru přiřadí jeho i -tou souřadnici v bázi \mathcal{X} , tj. $\vec{x}_i^\#(\vec{x}) = \alpha_i$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme **i -tým souřadnicovým funkciónem v bázi \mathcal{X}** .
3. Zobrazení $(\cdot)_\mathcal{X} : V \rightarrow T^n$, které vektoru přiřadí vektor všech jeho souřadnic v bázi \mathcal{X} , tj. $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme **souřadnicovým izomorfismem v bázi \mathcal{X}** .
($(\vec{x})_\mathcal{X}$ čteme „ \vec{x} v bázi \mathcal{X} “ nebo „souřadnice vektoru \vec{x} v bázi \mathcal{X} “).

Poznámka 31. Díky Větě 10 o jednoznačnosti vyjádření vektoru pomocí LK báze víme, že souřadnicový funkciónal a souřadnicový izomorfismus jsou skutečně zobrazení, tedy nestane se, že by $\vec{x}_i^\#$ přiřadil stejnému vektoru \vec{x} více různých čísel nebo $(\cdot)_\mathcal{X}$ přiřadil stejnému vektoru \vec{x} více různých n -tic čísel.

Věta 11 (Vlastnosti souřadnicového funkciónalu). Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T . Pak platí pro každé $i \in \hat{n}$:

1. Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $\vec{x}_i^\#(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}_i^\#(\vec{x}) + \vec{x}_i^\#(\vec{y})$ (říkáme, že $\vec{x}_i^\#$ je **aditivní**).
2. Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V$ je $\vec{x}_i^\#(\alpha \vec{x}) = \alpha \vec{x}_i^\#(\vec{x})$ (říkáme, že $\vec{x}_i^\#$ je **homogenní**).
3. $\vec{x}_i^\#(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo delta), tj. $\vec{x}_i^\#(\vec{x}_j) = 0$ pro každé $j \in \hat{n}, j \neq i$ a $\vec{x}_i^\#(\vec{x}_i) = 1$.

Důkaz. 1. Necht $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$. Pak $\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i$. Podle definice souřadnicového funkciónalu pak platí $\vec{x}_i^\#(\vec{x}) = \alpha_i$, $\vec{x}_i^\#(\vec{y}) = \beta_i$ a $\vec{x}_i^\#(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_i + \beta_i$, a tedy platí $\vec{x}_i^\#(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}_i^\#(\vec{x}) + \vec{x}_i^\#(\vec{y})$.

2. Necht $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Pak $\alpha \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) \vec{x}_i$. Podle definice je $\vec{x}_i^\#(\vec{x}) = \alpha_i$ a $\vec{x}_i^\#(\alpha \vec{x}) = \alpha \alpha_i$, a tedy platí $\vec{x}_i^\#(\alpha \vec{x}) = \alpha \vec{x}_i^\#(\vec{x})$.

3. Jelikož $\vec{x}_j = 0\vec{x}_1 + \dots + 0\vec{x}_{j-1} + 1\vec{x}_j + 0\vec{x}_{j+1} + \dots + 0\vec{x}_n$, podle definice máme $\vec{x}_i^\#(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$. \square

Důsledek 2 (Důsledek Věty 11 o vlastnostech souřadnicového funkciónalu). Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T . Pak platí:

1. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $(\vec{x} + \vec{y})_\mathcal{X} = (\vec{x})_\mathcal{X} + (\vec{y})_\mathcal{X}$ (říkáme, že souřadnicový izomorfismus je **aditivní**).
2. Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V$ je $(\alpha \vec{x})_\mathcal{X} = \alpha (\vec{x})_\mathcal{X}$ (říkáme, že souřadnicový izomorfismus je **homogenní**).
3. $(\vec{x}_j)_\mathcal{X} = \vec{e}_j$ pro každé $j \in \hat{n}$ (\vec{e}_j je j -tý vektor standardní báze T^n).

Poznámka 32. Řádně si rozmyslete rozdíl mezi objekty označenými \vec{x}_i a $\vec{x}_i^\#$. Zatímco \vec{x}_i je vektor z V , je $\vec{x}_i^\#$ zobrazení, které každému vektoru z V přiřazuje číslo z T .

Příklad 16. Uvažujme prostor \mathbb{R}^3 a v něm standardní bázi $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a bázi

$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Najděte $(\vec{x})_\mathcal{E}$ a $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

1. Jelikož $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dostáváme, že $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$.

Rozmyslete si, že pro libovolný vektor $\vec{x} \in T^n$ platí $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \vec{x}$.

2. Označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, pak $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Máme

tedy soustavu LAR s rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vyčteme $\alpha_3 = -2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = 3$, tj. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4 Podprostory

Definice 13. Necht' V je vektorový prostor nad tělesem T . Pak P nazveme **podprostorem** V a značíme $P \subset\subset V$, pokud

1. $P \subset V$,
2. $P \neq \emptyset$,
3. pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí $\vec{x} + \vec{y} \in P$ (říkáme, že množina P je **uzavřená na sčítání**),
4. pro každé $\alpha \in T$ a každý vektor $\vec{x} \in P$ platí $\alpha\vec{x} \in P$ (říkáme, že množina P je **uzavřená na násobení číslem z tělesa**).

Příklad 17. Necht' $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T . Pak $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset\subset V$. Splnění vlastností 1. až 4. z definice podprostoru pro LO plyne z Věty 3 o vlastnostech LO.

Příklad 18. V \mathbb{R}^2 máme následující typy podprostorů:

1. $[(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})]_\lambda = \{\vec{0}\}$,
2. $[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$ (víme, že jde o přímku jdoucí bodem $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$ a obsahující vektor \vec{x}),
3. $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde (\vec{x}, \vec{y}) je LN soubor (víme, že jde o celé \mathbb{R}^2 , protože (\vec{x}, \vec{y}) je 2-členný LN soubor, a tedy tvoří bázi \mathbb{R}^2).

Za chvíli se dozvíme, že žádné jiné podprostory už \mathbb{R}^2 nemá.

Příklad 19. V \mathbb{R}^3 máme následující typy podprostorů:

1. $[(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix})]_\lambda = \{\vec{0}\}$,
2. $[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$ (víme, že jde o přímku jdoucí bodem $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$ a obsahující vektor \vec{x}),
3. $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde (\vec{x}, \vec{y}) je LN soubor (snadno si rozmyslíte, že jde o rovinu procházející bodem $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$ a obsahující vektory \vec{x} a \vec{y}),
4. $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\lambda$, kde $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor (víme, že jde o celé \mathbb{R}^3 , protože $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je 3-členný LN soubor, a tedy tvoří bázi \mathbb{R}^3).

Za chvíli se dozvíme, že žádné jiné podprostory už \mathbb{R}^3 nemá.

Věta 12 (Alternativní definice podprostoru). Necht' V je vektorový prostor nad T . Necht' $P \subset V$ a $P \neq \emptyset$. Pak následující 3 tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $P \subset\subset V$,
2. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\forall \alpha \in T)(\alpha\vec{x} + \vec{y} \in P)$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P)(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in P)$.

Důkaz. *** 1. \Rightarrow 2.:

Necht' $\alpha \in T, \vec{x}, \vec{y} \in P$, pak podle uzavřenosti podprostoru na násobení vektoru číslem je $\alpha\vec{x} \in P$, a podle uzavřenosti podprostoru na sčítání vektorů je také $\alpha\vec{x} + \vec{y} \in P$.

2. \Rightarrow 3.:

Necht' $\vec{x} \in P$, pak $\vec{0} = (-1)\vec{x} + \vec{x} \in P$. Dokažme nyní tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$,

$\alpha_1 \in T$ a $\vec{x}_1 \in P$ platí $\alpha_1 \vec{x}_1 = \alpha_1 \vec{x}_1 + \vec{0} \in P$. Nechť pro nějaké $n \geq 1$ tvrzení platí. Berme libovolná čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in T$ a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1} \in P$, pak

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i \in P,$$

kde jsme využili faktu, že libovolná LK n -členného souboru z P patří do P .

3. \Rightarrow 1.:

Nechť $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y} \in P$, pak $\alpha \vec{x} \in P$ (dosadili jsme $n = 1, \alpha_1 = \alpha, \vec{x}_1 = \vec{x}$) a $\vec{x} + \vec{y} \in P$ (dosadili jsme $n = 2, \vec{x}_1 = \vec{x}, \vec{x}_2 = \vec{y}$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$).

□

Poznámka 33. Často budeme využívat při ověřování, že nějaká neprázdná množina je podprostor, 2. bod Věty 12, protože je to o něco jednodušší než vycházet přímo z definice podprostoru.

Věta 13 (Vlastnosti podprostorů). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $P \subset\subset V$. Pak platí:*

1. $\vec{0} \in P$.
2. $\{\vec{0}\} \subset\subset V$ a $V \subset\subset V$.
3. P je vektorový prostor nad tělesem T (při zachování operací z V).
4. Nechť $Q \subset\subset P$ a $P \subset\subset V$, pak $Q \subset\subset V$ (tranzitivita vlastnosti být podprostorem).
5. $\dim P \leq \dim V$.
6. Nechť $\dim V < +\infty$. Pokud $\dim P = \dim V$, pak $P = V$.

Důkaz. 1. $P \neq \emptyset$, proto existuje $\vec{x} \in V$ takový, že $\vec{x} \in P$, a jelikož je P množina uzavřená na násobení číslem, je také $0\vec{x} = \vec{0} \in P$.

2. Splnění vlastností 1. až 4. z definice podprostoru je zřejmé.

3. Musíme ověřit, že $P \neq \emptyset$ a že P je množina uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem a že platí axiomy. Neprázdnost a uzavřenost na operace plyne z faktu, že $P \subset\subset V$. Zbývá ověřit axiomy.

- V P existuje nulový vektor, jde o nulový vektor z V . (Patří do P podle 1. bodu.)
- Ke každému vektoru $\vec{x} \in P$, existuje ve V opačný vektor $-\vec{x}$. Podle Věty 1 je $-\vec{x}$ je $(-1)\vec{x}$, a tedy díky uzavřenosti P na násobení patří $-\vec{x}$ do P .
- Všechny ostatní axiomy platí pro všechny vektory z V , tím spíše platí i pro všechny vektory z $P \subset V$.

4. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

- $Q \subset V$, protože $Q \subset P \subset V$,
- $Q \neq \emptyset$, protože $Q \subset\subset P$,
- Q je množina uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, protože $Q \subset\subset P$.

5. Je-li $\dim V = +\infty$, pak je tvrzení zřejmé. Je-li $V = \{\vec{0}\}$, pak $P = \{\vec{0}\}$, tvrzení tedy opět platí. Z $\dim V = n$ plyne, že každý LN soubor ve V je maximálně n -členný, tedy i báze P je maximálně n -členná, proto $\dim P \leq n$.

6. Pro $V = \{\vec{0}\}$ je tvrzení zřejmé. Pro $V \neq \{\vec{0}\}$ označme $\dim P = \dim V = n \in \mathbb{N}$. Jelikož $\dim P = n$, existuje v P n -členná báze $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, tj. $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = P$. Prostor V má dimenzi rovnu n , a tak každý n -členný LN soubor ve V je bází V . Protože $P \subset V$, je $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bází V , a tedy $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = P$.

□

Definice 14. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Triviálními podprostory nazveme $\{\vec{0}\}$ a V . Pokud $P \subset\subset V$ a $P \neq V$, pak P nazveme vlastní podprostor.

Důsledek 3 (Důsledek Věty 13 o vlastnostech podprostorů). Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $\dim V < +\infty$ a nechť $P \subset\subset V$. Pokud P je vlastní podprostor V , pak $\dim P < \dim V$.

Důkaz. Z výrokové logiky víme, že pro libovolné výroky A, B platí $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Z 6. bodu Věty 13 o vlastnostech podprostorů dostaneme: $P \neq V \Rightarrow \dim P \neq \dim V$. Jelikož $P \subset\subset V$ a jelikož podle 5. bodu předchozí věty platí $\dim P \leq \dim V$, můžeme přepsat předchozí implikaci do tvaru: P je vlastní podprostor $V \Rightarrow \dim P < \dim V$. \square

Příklad 20. Vraťme se k podprostorům v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 . Z Věty 13 o vlastnostech podprostorů jsme se dozvěděli, že každý podprostor je zároveň vektorový prostor, má tedy dimenzi, a že pro dimenzi platí, že je ≤ 2 (jde-li o podprostor \mathbb{R}^2) nebo ≤ 3 (jde-li o podprostor v \mathbb{R}^3). Bud' jsou tedy podprostory nulové, nebo mají bázi maximálně 2, respektive 3-člennou, jejímiž jsou LO. Odtud tedy plyne, že žádné jiné podprostory než ty, které jsme popsali výše, v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 neexistují.

Definice 15. Nechť A, B jsou podmnožiny vektorového prostoru V nad tělesem T (ne nutně podprostory!). Součtem A a B nazveme množinu

$$A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}.$$

Řekneme, že součet $A + B$ je direktní, píšeme $A \oplus B$, pokud pro každý vektor $\vec{x} \in A + B$ existuje právě jeden vektor $\vec{a} \in A$ a právě jeden vektor $\vec{b} \in B$ takové, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$.

Příklad 21. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ a $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Pak $A + B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Součet $A + B$ není direktní, protože $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 22. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ a $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Pak $A + B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Tentokrát je $A + B$ direktní.

Poznámka 34. Připomeňme pro jistotu i definici sjednocení a průniku množin. Nechť A, B jsou podmnožiny vektorového prostoru V nad tělesem T (ne nutně podprostory!).

$$A \cup B = \{\vec{a} \mid \vec{a} \in A \vee \vec{a} \in B\},$$

$$A \cap B = \{\vec{a} \mid \vec{a} \in A \wedge \vec{a} \in B\}.$$

Věta 14 (Vlastnosti součtu a průniku podprostorů). Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T . Pak platí:

1. $P \cap Q \subset P + Q$.
2. $P + Q \subset\subset V$.
3. $P + Q$ je direktní $\Leftrightarrow P \cap Q = \{\vec{0}\}$.
4. $P \cap Q \subset\subset V$.
5. Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$, pak $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor V , který obsahuje vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, tj.
$$[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = \bigcap \{Q \subset\subset V \mid \vec{x}_i \in Q \text{ pro každé } i \in \hat{n}\}.$$

Důkaz. 1. Je-li $\vec{x} \in P \cap Q$, pak $\vec{x} \in P$. Jelikož $\vec{0} \in Q$, máme $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \in P + Q$.

2. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

- (a) $P + Q \subset V$, protože $P \subset V$ a $Q \subset V$ a V je uzavřená na sčítání,

- (b) $P + Q \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P$, $\vec{0} \in Q$ a $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in P + Q$,
- (c) $P + Q$ je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, protože pro libovolné $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P + Q$ a libovolné $\alpha \in T$ existují $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$ takové, že $\vec{x}_1 = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$ a $\vec{x}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$, proto $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha(\vec{p}_1 + \vec{q}_1) + \vec{p}_2 + \vec{q}_2 = (\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2)$, a jelikož P a Q jsou podprostory, platí podle Věty 12 $\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \in P$ a $\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 \in Q$, z čehož plyne, že $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in P + Q$.
3. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
- (\Rightarrow): Dokažme implikaci sporem. Předpokládáme, že $P + Q$ je direktní a $P \cap Q \neq \{\vec{0}\}$. Tedy existuje $\vec{x} \in P \cap Q, \vec{x} \neq \vec{0}$. Potom ale $\vec{x} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$, což jsou dva různé zápisy \vec{x} jakožto součtu vektorů z $P + Q$, což je spor s direktností.
- (\Leftarrow): Dokažme i druhou implikaci sporem. Předpokládáme, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, ale $P + Q$ není direktní. Pak existuje vektor $\vec{x} \in P + Q$, pro který lze najít $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P, \vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$, a $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$. Pak ale $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$ je nenulový vektor, který patří do P i do Q , je to tedy nenulový vektor z $P \cap Q$, což je spor s předpokladem, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$.
4. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:
- (a) $P \cap Q \subset V$, protože $P \subset V$ a $Q \subset V$,
- (b) $P \cap Q \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P, \vec{0} \in Q$, a tedy $\vec{0} \in P \cap Q$,
- (c) $P \cap Q$ je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, protože pro libovolné $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P \cap Q$ a libovolné $\alpha \in T$ platí, že \vec{x}_1, \vec{x}_2 patří jak do P , tak i do Q , jelikož P a Q jsou podprostory, patří $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ do P i do Q a odtud už plyne, že $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in P \cap Q$.
5. Už víme z prvního příkladu za definicí podprostoru, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset\subset V$. Abychom dokázali, že jde o nejmenší podprostor V , který obsahuje vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, stačí vysvětlit, že každý podprostor obsahující vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ obsahuje i jejich libovolnou LK. To je ale jasné z faktu, že podprostor je zároveň vektorový prostorem a o vektorových prostorech víme, že tuto vlastnost mají. □

Poznámka 35. *Rozmyslete si sami, že dokonce průnik libovolného počtu podprostorů a součet konečného počtu podprostorů vektorového prostoru V nad tělesem T tvoří podprostor.*

Poznámka 36. *Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T . Možná by vás napadlo, že zajímáme-li se o $P \cap Q$, bylo by logické zkoumat také $P \cup Q$, ovšem $P \cup Q$ nemusí tvořit podprostor. Například pro $V = \mathbb{R}^2$ a $P = [(\frac{1}{0})]_\lambda$ a $Q = [(\frac{0}{1})]_\lambda$ jsou jistě $P, Q \subset\subset V$, ale vektor $(\frac{1}{0}) + (\frac{0}{1}) = (\frac{1}{1}) \notin P \cup Q$, přestože jde o součet dvou vektorů z $P \cup Q$.*

Poznámka 37. *Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T . Místo sjednocení tedy zkoumáme $P + Q$. Ukažme, že jde o nejmenší podprostor, který obsahuje $P \cup Q$. Skutečně každý vektor z $\vec{p} \in P$ je roven $\vec{p} + \vec{0}$, a tedy patří do $P + Q$. Podobně každý vektor $\vec{q} \in Q$ je roven $\vec{0} + \vec{q}$, a tedy je z $P + Q$. To znamená, že $P \cup Q \subset P + Q$. A že je $P + Q$ nejmenší takový podprostor plyne z faktu, že každý podprostor obsahující všechny vektory z P i všechny vektory z Q obsahuje také všechny jejich součty, tedy obsahuje $P + Q$.*

Poznámka 38. *Ujasněme, jak vypadá $P + Q$, pokud jsou P i Q zadány jako LO. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ jsou soubory z V . Je-li $P = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ a $Q = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$, pak $P + Q = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$.*

- Ukažme nejprve, že $P + Q \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$.
Nechť $\vec{x} \in P + Q$, pak existují $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $\vec{p} \in P$, je \vec{p} LK generátorů P , tj. existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, a podobně existují čísla $\beta_1, \dots, \beta_m \in T$ taková, že $\vec{q} = \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$. Odtud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$, a tedy $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$.

- Analogicky ukážeme, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda \subset P + Q$.
Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$. Pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$. Jelikož $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in P$ a $\sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i \in Q$, vidíme, že $\vec{x} \in P + Q$.

4.1 1. věta o dimenzi

Věta 15 (1. věta o dimenzi). Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $P, Q \subset \subset V$. Nechť $\dim P < +\infty$ a $\dim Q < +\infty$. Pak platí:

$$\dim (P + Q) + \dim (P \cap Q) = \dim P + \dim Q. \quad (5)$$

Důkaz. *** Rozdělíme důkaz na několik případů:

1. Je-li $P = \{\vec{0}\}$, pak $P + Q = Q$ a $P \cap Q = P$ a platnost rovnosti (5) je zřejmá.
2. Je-li $Q = \{\vec{0}\}$, je stejně jako v předchozím rovnost (5) zřejmá.
3. Je-li $P \neq \{\vec{0}\}$ a $Q \neq \{\vec{0}\}$, označme $n = \dim P$ a $m = \dim Q$, platí tedy $n, m \in \mathbb{N}$. Rozlišíme dva případy:

- (a) Nechť $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Označme $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ libovolnou bází P a $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ libovolnou bází Q . Dokážeme-li, že pak $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báze $P + Q$, bude rovnost (5) dokázána, protože pak bude jasné, že $\dim (P + Q) + \dim (P \cap Q) = (n + m) + 0 = \dim P + \dim Q$.

Dokážme tedy, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báze $P + Q$.

- Musíme ukázat, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ generuje $P + Q$. Pro každé $\vec{x} \in P + Q$ existuje $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $\vec{p} \in P$, lze \vec{p} psát jako LK bazických vektorů P , tj. existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, a podobně existují čísla $\beta_1, \dots, \beta_m \in T$ taková, že $\vec{q} = \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$. Odtud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$, a tedy $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$.
- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je LN, protože libovolná LK $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i = \vec{0}$ je triviální. To plyne z následujících úprav: $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = -\sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$, což je vektor patřící do P i do Q , tedy leží v $P \cap Q$. Takový vektor je pak ale nutně nulový, tj. $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = -\sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i = \vec{0}$. Z LN souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ plyne, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, a z LN souboru $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ plyne $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$, což znamená, že LK je triviální.

- (b) Nechť $P \cap Q \neq \{\vec{0}\}$. Označme $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s)$ libovolnou bází $P \cap Q$. Protože $P \cap Q \subset P$, lze $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s)$ doplnit na bázi P , označme ji $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s})$. Protože $P \cap Q \subset Q$, lze $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s)$ doplnit na bázi Q , označme ji $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$. Dokážeme-li, že pak $\mathcal{X} = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$ je báze $P + Q$, bude rovnost (5) dokázána, protože pak bude jasné, že $\dim (P + Q) + \dim (P \cap Q) = (n + m - s) + s = \dim P + \dim Q$, protože $n + m - s$ je počet vektorů v souboru \mathcal{X} .

Dokážme tedy, že $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$ je báze $P + Q$.

- Musíme ukázat, že $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$ generuje $P + Q$. Pro každé $\vec{x} \in P + Q$ existuje $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $\vec{p} \in P$, lze \vec{p} psát jako LK bazických vektorů P , tj. existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-s} \in T$ taková, že $\vec{p} = \sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \gamma_i \vec{x}_i$, a podobně existují čísla $\beta_1, \dots, \beta_s, \delta_1, \dots, \delta_{m-s} \in T$ taková, že $\vec{q} = \sum_{i=1}^s \beta_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{m-s} \delta_i \vec{y}_i$. Odtud $\vec{x} = \sum_{i=1}^s (\alpha_i + \beta_i) \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \gamma_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{m-s} \delta_i \vec{y}_i$, a tedy $\vec{x} \in [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s}]_\lambda$.
- $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$ je LN, protože libovolná LK $\sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \vec{0}$ je triviální. To plyne z následujících úprav: $\sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \vec{x}_i = -\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i$, což je vektor patřící do P (jak je vidět z levé strany rovnosti) i do Q (jak je vidět z pravé strany rovnosti), tedy leží v $P \cap Q$. Takový vektor je pak LK bazických vektorů $P \cap Q$, tj. $\sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \vec{x}_i =$

$-\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^s \delta_i \vec{z}_i$. Pak ale $\sum_{i=1}^s \delta_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \vec{0}$ a z LN souboru $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$ plyne, že $\gamma_1 = \dots = \gamma_{m-s} = 0$. Poté z rovnosti $\sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \vec{x}_i = -\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \vec{0}$ a z LN souboru $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s})$ plyne, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$ a $\beta_1 = \dots = \beta_{n-s}$, což znamená, že LK je triviální.

□

Poznámka 39. Všimněme si, že 1. věta o dimenzi by platila i pro prostory P, Q , kde jeden nebo i oba by měly dimenzi nekonečnou. Raději jsme ale do předpokladů přidali konečné dimenze, protože například v rovnosti $\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$ už je třeba konečnost hlídat, abychom neodečítali $\infty - \infty$.

Příklad 23. Necht' $P, Q \subset \mathbb{R}^3$. Necht' $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ a $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Najděte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$.

Řešení: Z poznámky o součtu LO víme, že $P+Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Najít bázi $P+Q$ tedy znamená vybrat bázi ze souboru generátorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vidíme, že $\dim(P+Q) = 3$ a báze $P+Q$ je například $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ (matice má tři hlavní sloupce a bázi tvoří vektory odpovídající hlavním

sloupcům). Pokud bychom chtěli jednodušší bázi $P+Q$, stačí si uvědomit, že $P+Q \subset \mathbb{R}^3$ a $\dim(P+Q) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Z Věty 13 o vlastnostech podprostorů pak dostáváme, že $P+Q = \mathbb{R}^3$,

takže jinou bázi $P+Q$ je například $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Z 1. věty o dimenzi zjistíme, že $\dim(P \cap Q) = 2 + 2 - 3 = 1$. Jakýkoliv nenulový vektor z $P \cap Q$ je

tedy bázi. Jelikož $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je LZ soubor, jistě najdeme $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ taková, že alespoň jedno z nich je nenulové a že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in P \cap Q.$$

Jde o hledaný nenulový vektor. Kdyby byl totiž nulový, plynulo by z LN $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, že

$\alpha = \beta = 0$ a z LN $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, že $\gamma = \delta = 0$, což je spor s předpokladem, že alespoň jedno

z čísel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je nenulové. Neznámé najdeme ze stejné matice jako při vyšetřování báze $P + Q$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Při volbě $\delta = -1$, dopočteme už jednoznačně neznámé odpovídající hlavním sloupcům $\gamma = 1, \beta = 1$ a $\alpha = 1$. Odtud

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P \cap Q.$$

Tedy $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze $P \cap Q$.

4.2 Doplněk podprostoru

Definice 16. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T a nechť $P, Q \subset V$. Pokud podprostory splňují $P \oplus Q = V$, pak Q nazveme **doplněk** P do V a jeho dimenzi $\dim Q$ značíme $\text{codim } P$ a nazýváme **kodimenze** P .

Poznámka 40. Všimněme si, že podle 1. věty o dimenzi je kodimenze P dobře definována. I kdyby doplňků existovalo více, pro kodimenzi P platí: $\dim P + \text{codim } P = \dim V + \dim(P \cap Q)$ a $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, což plyne z direktnosti součtu $P \oplus Q = V$. Proto $\text{codim } P = \dim V - \dim P$, a nezávisí tedy na volbě doplňku P do V .

Poznámka 41. Doplněk podprostoru lze definovat i v prostorech nekonečné dimenze. K takovému obecnějšímu případu se vrátíme později. Ke korektní práci s obecnější definicí budeme totiž potřebovat znalosti z lineárních zobrazení.

Věta 16 (Existence doplňku). Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T a nechť $P \subset V$. Pak doplněk P do V existuje.

Důkaz. • Nechť $P = \{\vec{0}\}$, pak $Q = V$ splňuje evidentně vlastnosti doplňku.

- Nechť $P = V$, pak $Q = \{\vec{0}\}$ splňuje evidentně vlastnosti doplňku.
- Nechť P je vlastní a nenulový podprostor V a označme $k = \dim P$. Pak existuje $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ báze P . Doplňme ji vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ na bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ V . Pak $Q = [\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je hledaný doplněk. Ukážeme:
 1. $P + Q = V$, tj. ukážeme, že pro každé $\vec{x} \in V$ existuje $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jistě existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a hledanými vektory jsou $\vec{p} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{q} = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$.
 2. $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, tj. stačí ukázat, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Je-li $\vec{x} \in P \cap Q$, pak patří do P , proto existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$, a také patří do Q , tedy existují čísla $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Odtud máme $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, proto $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i - \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n (-\alpha_i) \vec{x}_i$. Z LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$. Tedy $\vec{x} = \vec{0}$.

□

Poznámka 42. Doplněk obvykle není jediný! Například pro $V = \mathbb{R}^2$ a $P = [(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})]_\lambda$ je doplňkem $Q_1 = [(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix})]_\lambda$, ale také třeba $Q_2 = [(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})]_\lambda$.

Představíme-li si situaci geometricky, pak P je přímka procházející počátkem $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$ a bodem $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})$ a doplňkem P je libovolná přímka jdoucí počátkem, která je různá od P .

5 Lineární zobrazení

Definice 17. Necht P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Zobrazení $A : P \rightarrow Q$ nazveme **lineárním (homomorfním)**, pokud

1. pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$ (hovoříme o **aditivitě** zobrazení A),
2. pro každé $\alpha \in T$ a každý vektor $\vec{x} \in P$ platí $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$ (hovoříme o **homogenitě** zobrazení A).

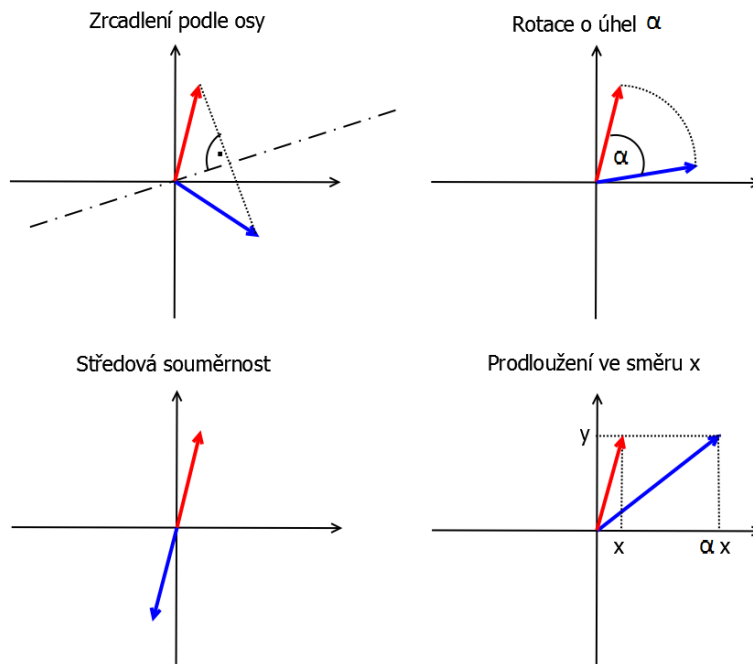
Poznámka 43. Místo $A(\vec{x})$ budeme častěji psát $A\vec{x}$.

Poznámka 44. Lineární zobrazení má smysl zavádět jen pro vektorové prostory P, Q nad stejným tělesem. V podmínce 2. (homogenita) se totiž čísla z tělesa násobí jak vektory \vec{x} z P , tak i vektory $A\vec{x}$ z Q .

Poznámka 45. Pro každé lineární zobrazení $A : P \rightarrow Q$ platí, že $A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$, přičemž $\vec{0}_P$ je nulový vektor z P a $\vec{0}_Q$ je nulový vektor z Q .

Vysvětlení: $A\vec{0}_P = A(0 \cdot \vec{0}_P) = 0 \cdot A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$, kde v první a poslední rovnosti je využit fakt z Věty 1, že $0\vec{a} = \vec{0}$ pro každý vektor \vec{a} a ve druhé rovnosti je využita homogenita A .

Příklad 24. Uveďme nejznámější příklady lineárních zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.



Obrázek 3: Červeně vyznačeny vektory a modře jejich obrazy.

1. zrcadlení podle osy jdoucí počátkem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
2. rotace o úhel α po směru hodinových ručiček (samozřejmě, že také rotace o úhel α proti směru hodinových ručiček je lineární zobrazení, je to vlastně rotace o úhel $2\pi - \alpha$ po směru hodinových ručiček),
3. středová souměrnost,

4. prodloužení (zkrácení) ve směru x (zobrazení přiřadí vektoru $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor $\begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}$), kde pro $\alpha > 1$ jde o prodloužení a pro $0 < \alpha < 1$ o zkrácení ve směru x nebo ve směru y .

U všech zobrazení sami ověřte, že jsou lineární.

Věta 17 (Alternativní definice lineárního zobrazení). *Nechť P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem T . Nechť $A : P \rightarrow Q$. Pak následující 3 tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $A \in \mathcal{L}(P, Q)$,
2. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\forall \alpha \in T)(A(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y})$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P)(A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i)$.

Důkaz. 1. \Rightarrow 2.:

Nechť $\alpha \in T, \vec{x}, \vec{y} \in P$, pak podle aditivity A a poté homogenity A platí $A(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = A(\alpha \vec{x}) + A\vec{y} = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}$.

2. \Rightarrow 3.:

Nechť $\vec{x} \in P$, pak $\vec{0}_P = (-1)\vec{x} + \vec{x}$. Podle 2. tedy máme $A\vec{0}_P = (-1)A\vec{x} + A\vec{x} = \vec{0}_Q$. Tedy obraz nulového vektoru je nulový vektor. Dokažme nyní tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$, $\alpha_1 \in T$ a $\vec{x}_1 \in P$ platí $\alpha_1 \vec{x}_1 = \alpha_1 \vec{x}_1 + \vec{0}_P$. Proto podle 2. platí $A(\alpha_1 \vec{x}_1) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + A\vec{0}_P = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \vec{0}_Q = \alpha_1 A\vec{x}_1$. Nechť pro nějaké $n \geq 1$ tvrzení platí. Berme libovolná čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in T$ a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1} \in P$, pak $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i$, tedy podle 2. a poté podle indukčního předpokladu máme

$$A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + A\left(\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A\vec{x}_i.$$

3. \Rightarrow 1.:

Nechť $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y} \in P$, pak $A(\alpha \vec{x}) = \alpha A\vec{x}$ (dosadili jsme $n = 1, \alpha_1 = \alpha, \vec{x}_1 = \vec{x}$) a $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ (dosadili jsme $n = 2, \vec{x}_1 = \vec{x}, \vec{x}_2 = \vec{y}$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$).

□

Poznámka 46. 2. bod Věty 17 usnadňuje ověřování linearitu zobrazení, proto jej budeme ve všech následujících důkazech využívat, místo abychom vycházeli přímo z definice.

Definice 18. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Množinu lineárních zobrazení $P \rightarrow Q$ značíme $\mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\alpha \in T$, pak operace*

1. **součet zobrazení** $A + B$ pro každý vektor $\vec{x} \in P$ definujeme $(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$,
2. **násobení zobrazení A číslem α z T** αA pro každý vektor $\vec{x} \in P$ definujeme $(\alpha A)\vec{x} = \alpha A\vec{x}$.

Věta 18. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Pak množina $\mathcal{L}(P, Q)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem z tělesa definovanými výše tvoří vektorový prostor nad T .*

Důkaz. Je třeba ověřit:

1. Neprázdnot $\mathcal{L}(P, Q)$:
 $\mathcal{L}(P, Q)$ obsahuje nulové zobrazení Θ , které každému vektoru z P přiřazuje nulový vektor z Q . Θ je lineární, protože
 - (a) pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\alpha \in t$ platí $\Theta(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}_Q = \alpha \vec{0}_Q + \vec{0}_Q = \alpha \Theta \vec{x} + \Theta \vec{y}$.
2. Uzavřenost na sčítání vektorů:
 Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že $A + B$ je lineární zobrazení.

(a) Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\beta \in T$ platí

$$\begin{aligned}(A + B)(\beta\vec{x} + \vec{y}) &= A(\beta\vec{x} + \vec{y}) + B(\beta\vec{x} + \vec{y}) = (\beta A\vec{x} + A\vec{y}) + (\beta B\vec{x} + B\vec{y}) = \\ &= \beta(A\vec{x} + B\vec{x}) + (A\vec{y} + B\vec{y}) = \beta \cdot (A + B)\vec{x} + (A + B)\vec{y},\end{aligned}$$

kde v první a poslední rovnosti byla využita definice součtu zobrazení $A + B$ a ve druhé rovnosti linearita zobrazení A a B podle Věty 17 a ve třetí rovnosti vlastnosti vektorového prostoru Q .

3. Uzavřenost na násobení vektorů číslem:

Pro každé $\alpha \in T$ a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že αA je lineární zobrazení.

(a) Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\beta \in T$ platí

$$(\alpha A)(\beta\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A(\beta\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\beta A\vec{x} + A\vec{y}) = \alpha\beta A\vec{x} + \alpha A\vec{y} = \beta(\alpha A)\vec{x} + (\alpha A)\vec{y},$$

kde v první a poslední rovnosti byla využita definice násobku zobrazení αA a ve druhé rovnosti linearita zobrazení A a ve třetí rovnosti vlastnosti vektorového prostoru Q .

4. Platnost osmi axiomů vektorového prostoru:

(a) Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $A + B = B + A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} = B\vec{x} + A\vec{x} = (B + A)\vec{x}$, využili jsme tedy komutativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q .

(b) Pro každé $A, B, C \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $A + (B + C) = (A + B) + C$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A + (B + C))\vec{x} = A\vec{x} + (B + C)\vec{x} = A\vec{x} + (B\vec{x} + C\vec{x}) = (A\vec{x} + B\vec{x}) + C\vec{x} = (A + B)\vec{x} + C\vec{x} = ((A + B) + C)\vec{x}$, využili jsme tedy asociativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q .

(c) Existuje zobrazení $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $A + B = A$, stačí položit $B := \Theta$ (nulové zobrazení), o kterém už víme, že je lineární, a snadno ověříme, že roli nulového vektoru hraje, protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí $(A + \Theta)\vec{x} = A\vec{x} + \Theta\vec{x} = A\vec{x} + \vec{0}_Q = A\vec{x}$.

(d) Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ existuje $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že $A + B = \Theta$, stačí položit $B = (-1)A$, o kterém z uzavřenosti na násobení číslem víme, že je lineární, a snadno ověříme, že hraje roli opačného vektoru k A , protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí $(A + ((-1)A))\vec{x} = A\vec{x} + ((-1)A)\vec{x} = A\vec{x} + (-1)A\vec{x} = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q$.

(e) Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, protože pro každý vektor $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(\beta A))\vec{x} = \alpha(\beta A)\vec{x} = \alpha(\beta A\vec{x}) = (\alpha\beta)A\vec{x} = ((\alpha\beta)A)\vec{x}$, kde jsme využili asociativního zákona vzhledem k operaci násobení číslem v Q .

(f) Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $1A = A$, to plyne přímo z definice násobku zobrazení číslem.

(g) Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $((\alpha + \beta)A)\vec{x} = (\alpha + \beta)A\vec{x} = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\beta A)\vec{x} = (\alpha A + \beta A)\vec{x}$, kde jsme využili distributivity operace násobení číslem vzhledem ke sčítání čísel v Q .

(h) Pro každé $\alpha \in T$ a pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(A + B))\vec{x} = \alpha(A + B)\vec{x} = \alpha(A\vec{x} + B\vec{x}) = \alpha A\vec{x} + \alpha B\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\alpha B)\vec{x} = (\alpha A + \alpha B)\vec{x}$, kde jsme využili distributivitu operace násobení číslem vzhledem ke sčítání vektorů v Q .

□

Definice 19. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T .*

- *Je-li $A \in \mathcal{L}(V, V)$, nazýváme A lineární operátor a píšeme $\mathcal{L}(V)$ místo $\mathcal{L}(V, V)$.*

- Je-li $\varphi \in \mathcal{L}(V, T)$, nazýváme φ **lineární funkcionál** a píšeme $V^\#$ místo $\mathcal{L}(V, T)$ a $V^\#$ nazýváme **duální prostor** k V .

Příklad 25. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T .

- Příkladem lineárního operátoru je identický operátor I , který každému $\vec{x} \in V$ přiřadí $I\vec{x} = \vec{x}$.
- Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V . Pak pro každé $i \in \hat{n}$ je i -tý souřadnicový funkcionál $\vec{x}_i^\#$ v bázi \mathcal{X} příkladem lineárního funkcionálu, přičemž aditivita a homogenita $\vec{x}_i^\#$ plyne z Věty 11 o vlastnostech souřadnicového funkcionálu.

Definice 20. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

- Je-li A prosté, řekneme, že A je **monomorfní**.
- Je-li A „na“ Q , řekneme, že A je **epimorfní**.
- Je-li A prosté a „na“ Q , řekneme, že A je **izomorfní**.
- Je-li A izomorfní a $P = Q$, řekneme, že A je **regulární operátor**.

Poznámka 47. Definice prostého zobrazení a zobrazení „na“ (surjektivního) znáte z matematické analýzy. Přesto je připomeneme. Nechť $A : P \rightarrow Q$.

- A je prosté, pokud $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)((A\vec{x} = A\vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{y}))$.
- A je „na“ Q , pokud $(\forall \vec{y} \in Q)(\exists \vec{x} \in P)(A\vec{x} = \vec{y})$.

Příklad 26. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T . Ukažme, že souřadnicový izomorfismus $(\cdot)_{\mathcal{X}}$ v bázi \mathcal{X} je skutečně izomorfismus.

Řešení: Připomeňme, že pro každý vektor $\vec{x} \in V$ je souřadnicový izomorfismus definován vztahem $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Z Důsledku Věty 11 o vlastnostech souřadnicového funkcionálu plyne linearita souřadnicového izomorfismu. Zbývá tedy dokázat, že $(\cdot)_{\mathcal{X}} : V \rightarrow T^n$ je prosté a „na“.

- Prostota:

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí, že je-li $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ a označíme-li $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pak z definice souřadnicového izomorfismu máme $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{y}$.

- „na“ T^n :

Nechť $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$, pak pro $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in V$ platí $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Věta 19 (Linearita inverzního zobrazení). Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je izomorfní, pak A^{-1} existuje a je také izomorfní.

Důkaz. Jelikož A je prosté zobrazení s definičním oborem P a oborem hodnot Q , víme z matematické analýzy, že A^{-1} existuje, má definiční obor Q a obor hodnot P . Zbývá ověřit, že $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$.

Pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Q$ a pro každé $\alpha \in T$ ověříme, že $A^{-1}(\alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha A^{-1} \vec{y}_1 + A^{-1} \vec{y}_2$. Označme $\vec{x}_1 = A^{-1} \vec{y}_1$ a $\vec{x}_2 = A^{-1} \vec{y}_2$. Pak z definice inverzního zobrazení víme, že $\vec{y}_1 = A \vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A \vec{x}_2$. Z linearity A máme $\alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \alpha A \vec{x}_1 + A \vec{x}_2 = A(\alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2)$. Opět z definice inverzního zobrazení dostáváme $A^{-1}(\alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha A^{-1} \vec{y}_1 + A^{-1} \vec{y}_2$. □

Věta 20 (Linearita složeného zobrazení). *Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak $AB \in \mathcal{L}(P, V)$.*

Důkaz. Složené zobrazení je pro každé $\vec{x} \in P$ definováno $(AB)\vec{x} = A(B\vec{x})$. Jde tedy o korektně definované zobrazení P do V (A působí na vektor $B\vec{x}$, který je z Q). Zbývá ověřit linearitu.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\alpha \in T$ platí $(AB)(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = A(B(\alpha\vec{x} + \vec{y})) = A(\alpha B\vec{x} + B\vec{y}) = \alpha A(B\vec{x}) + A(B\vec{y}) = \alpha(AB)\vec{x} + (AB)\vec{y}$, kde v první a poslední rovnosti je využita definice složeného zobrazení, v druhé rovnosti aditivita B a ve třetí rovnosti aditivita A . \square

Příklad 27. *Nechť zobrazení $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou definována*

- pro každé $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ je $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$,
- pro každé $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ je $B(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$.

Ověřme, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Řešení:

Pro každé $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $A \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha\alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha\alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha\alpha_2 + \beta_2) \\ \alpha\alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \\ \alpha\alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \alpha A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, kde jsme využili vlastnosti sčítání čísel v \mathbb{R} a definici sčítání vektorů v \mathbb{R}^2 .

Sami ověřte, že $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Z Věty 20 o skládání lineárních zobrazení víme, že $AB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Najděme předpis pro AB .

Řešení: *Pro každé $\alpha_1 \in \mathbb{R}$*

$$(AB)(\alpha_1) = A(B(\alpha_1)) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Definice 21. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset P$ a $N \subset Q$. Pak (stejně jako v matematické analýze)*

- **obrazem** M při zobrazení A nazveme množinu $A(M) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in M\}$,
- **vzorem** N při zobrazení A nazveme množinu $A^{-1}(N) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} \in N\}$.

Poznámka 48. *Místo $A^{-1}(\{\vec{x}\})$ budeme psát $A^{-1}(\vec{x})$.*

Příklad 28. *Nechť A, B definovány stejně jako v Příkladě 27.*

- *Nechť $M = \{1, 2, 3\}$, pak $B(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.*
- *Nechť $N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a $N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, pak $B^{-1}(N_1) = \{1\}$ a $B^{-1}(N_2) = \emptyset$.*
- *Nechť $N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, pak $A^{-1}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.*

Poznámka 49. *Neplette si vzor množiny $A^{-1}(N)$ (jde o množinu) s inverzním zobrazením A^{-1} (jde o zobrazení). I pro zobrazení, která nejsou prostá, má smysl hovořit o vzorech množin, viz předchozí příklad, kde $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ existuje a A není prosté, protože například $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Věta 21 (Obraz a vzor podprostoru). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset P$ a $N \subset Q$. Pak*

- $A(M) \subset Q$,
- $A^{-1}(N) \subset P$.

Speciálně $A(P) \subset Q$.

Důkaz. • Dokažme nejprve $A(M) \subset\subset Q$. (Všimněte si, kde v bodech 2., 3. i 4. využíváme, že M je podprostor.)

1. $A(M) \subset Q$ přímo z definice.
 2. $A(M) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_P \in M$, proto $\vec{0}_Q \in A(M)$.
 3. $A(M)$ je uzavřená na sčítání a násobení vektoru číslem, protože pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in A(M)$ a pro každé $\alpha \in T$ existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M$ tak, že $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$, odtud dostáváme $\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \in A(M)$, využili jsme aditivity A a uzavřenosti M na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem.
- Dokažme $A^{-1}(N) \subset\subset P$.
1. $A^{-1}(N) \subset P$ přímo z definice.
 2. $A^{-1}(N) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_Q \in N$, proto $\vec{0}_P \in A^{-1}(N)$.
 3. $A^{-1}(N)$ je uzavřená na sčítání a násobení vektoru číslem, protože pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$ a pro každé $\alpha \in T$ platí $A\vec{x}_1 \in N$, $A\vec{x}_2 \in N$ a z linearity A dále dostaneme $A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(\alpha\vec{x}_1) + A\vec{x}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 \in N$, proto $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$, využili jsme uzavřenosti N na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem.

□

5.1 Hodnost, jádro, defekt

Definice 22. Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

- **Hodností** A nazveme $\dim A(P)$ a značíme $h(A)$.
- **Jádrem** A nazveme $A^{-1}(\vec{0}_Q) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{0}_Q\}$ a značíme $\ker A$.
- **Defektem** A nazveme $\dim \ker A$ a značíme $d(A)$.

Poznámka 50. Má smysl uvažovat dimenzi oboru hodnot $A(P)$ a jádra $\ker A$, protože z Věty 21 o obrazech a vzorech podprostorů plyne, že jde o podprostory.

Příklad 29. Pro zobrazení A, B z Příkladu 27 určíme hodnost, jádro a defekt.

Řešení:

- $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Proto $d(A) = 1$.
 $A(\mathbb{R}^3) \subset\subset \mathbb{R}^2$, proto $h(A) \leq 2$. Zároveň $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{R}^3)$, proto $h(A) \geq 2$. Suma sumárum je $h(A) = 2$ a z Věty 13 o vlastnostech podprostorů plyne, že $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.
- $\ker B = \{(\alpha_1) \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{0\}$. Proto $d(B) = 0$.
 $B(\mathbb{R}) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Tedy $h(B) = 1$.

Věta 22 (Obraz lineárního obalu). Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor z P . Pak

$$A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda.$$

Důkaz. Dokazujeme rovnost množin, tedy dvě inkluze.

- $A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) \subset [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$:
 Necht $\vec{y} \in A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$, pak existuje $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ takový, že $\vec{y} = A\vec{x}$. Tedy existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, odtud díky linearitě A dostáváme $\vec{y} = A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i \in [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$.

- $[A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda \subset A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$:
Nechť $\vec{y} \in [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$, pak existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) \in A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$, v poslední rovnosti jsme využili linearitu A .

□

Příklad 30. Věta 22 o obrazu lineárního obalu umožňuje vypočítat snadno hodnotu zobrazení. Nechť A jako v Příkladě 27. Najděte $h(A)$.

Řešení: Pak $A(\mathbb{R}^3) = A([\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda) = [A(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), A(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})]_\lambda = [(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})]_\lambda = \mathbb{R}^2$, proto $h(A) = 2$.

Věta 23 (Prostota a jádro lineárního zobrazení). Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. A je prosté, právě když $\ker A = \{\vec{0}_P\}$.

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

(\Rightarrow): Dokážeme implikaci sporem. Předpokládáme tedy, že A je prosté a $\ker A \neq \{\vec{0}_P\}$. Pak existuje v $\ker A$ vektor $\vec{x} \neq \vec{0}_P$, tedy $A\vec{x} = \vec{0}_Q = A\vec{0}_P$, to je ale spor s prostotou A .

(\Leftarrow): Postupujeme opět sporem. Předpokládáme, že $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a zároveň A není prosté, tj. existují $\vec{x}, \vec{y} \in P$ takové, že $A\vec{x} = A\vec{y}$ a přitom $\vec{x} \neq \vec{y}$. Odtud máme díky linearitě A rovnost $A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_Q$, což ale znamená, že $\vec{x} - \vec{y} \in \ker A$, a to je spor s $\ker A = \{\vec{0}_P\}$. □

Příklad 31. Ukážeme, že obdobné tvrzení pro zobrazení, které není lineární, neplatí. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcionál definovaný následovně. Pro každé $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definujeme $\varphi(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Pak φ není prostý - například $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ a zároveň $\{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}) = 0\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Podle věty o prostotě a jádru lineárního zobrazení je jasné, že φ není lineární. Jinými slovy: předpoklad linearitě zobrazení A v předchozí větě je nezbytný!

Věta 24 (Nerovnosti pro hodnotu). Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak $h(A) \leq \dim Q$ a $h(A) \leq \dim P$.

Důkaz. Pro prostory nekonečné dimenze tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\dim P < +\infty$ a $\dim Q < +\infty$.

- Jelikož $A(P) \subset \subset Q$, je jasné, že $h(A) = \dim A(P) \leq \dim Q$.
- Pro $P = \{\vec{0}\}$, je $h(A) = \dim A(P) = 0$, a tedy $h(A) \leq \dim P$. Pro $P \neq \{\vec{0}\}$ označme $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bázi P , tedy $\dim P = n \in \mathbb{N}$. Pak

$$A(P) = A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda,$$

odkud plyne, že $h(A) = \dim A(P) \leq n = \dim P$.

□

Věta 25 (Hodnota složeného zobrazení). Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem T a nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak

- $h(AB) \leq h(A)$, a je-li B izomorfní, pak platí $h(AB) = h(A)$,
- $h(AB) \leq h(B)$, a je-li A izomorfní, pak platí $h(AB) = h(B)$.

Důkaz. • $h(AB) = \dim A(B(P))$, protože $B(P) \subset \subset Q$, platí, že $A(B(P)) \subset \subset A(Q)$. Proto $h(AB) \leq \dim A(Q) = h(A)$. Všimněme si, že je-li B „na“ Q , tj. $B(P) = Q$, pak platí rovnost. Tedy ve větě stačilo dokonce předpokládat B epimorfnní.

- Je-li $h(B) = 0$, pak $h(AB) = 0$ a nerovnost platí. Pokud $h(B) = n$, označme $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bázi $B(P)$, pak

$$h(AB) = \dim A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = \dim[A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda \leq n = h(B).$$

Je-li A prosté, stačí dokázat, že $(A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n)$ je LN, a tudíž $h(AB) = h(B)$. Tedy ve větě stačilo dokonce předpokládat A monomorfní.

Dokažme tedy lineární nezávislost $(A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n)$. Uvažujme libovolnou LK $\sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i = \vec{0}_Q$, pak díky linearitě A platí $A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \vec{0}_Q$. Jelikož je A prosté, platí $\ker A = \{\vec{0}_P\}$, proto $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}_P$. Z LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ pak plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$. Tedy soubor $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$ je LN. □

Poznámka 51. Všimněme si, že v druhé části důkazu předchozí věty jsme se dozvěděli, že platí následující implikace:

Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a A prosté, pak

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } P \Rightarrow (A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } Q.$$

Sami si rozmyslete, že opačný směr platí pro libovolné lineární zobrazení:

Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, pak

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } P \Leftarrow (A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } Q.$$

Věta 26 (Zadání lineárního zobrazení pomocí obrazů bazických vektorů). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ je libovolný soubor z Q . Pak existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující pro každé $i \in \hat{n}$ $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$.*

Slovy: „Lineární zobrazení je jednoznačně určeno, jsou-li dány obrazy bazických vektorů.“

Důkaz. • Existence:

Pro každé $\vec{x} \in P$, označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a definujme

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i.$$

Pak $A : P \rightarrow Q$ a evidentně splňuje $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Zbývá ukázat, že A je lineární.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a každé $\alpha \in T$, označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, pak z linearitě

souřadnicového izomorfismu víme, že $(\alpha\vec{x} + \vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha\alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$, odkud dostaneme

$$A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \sum_{i=1}^n (\alpha\alpha_i + \beta_i) \vec{y}_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{y}_i = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}.$$

• Jednoznačnost:

Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňuje $B\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Pak pro každé $\vec{x} \in P$, pro které

$(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, platí díky linearitě B

$$B\vec{x} = B\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i = A\vec{x}.$$

Proto $B = A$. □

Věta 27 (Řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$). Necht' P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht' $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\vec{b} \in A(P)$. Pak množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$, tedy $A^{-1}(\vec{b})$, má tvar

$$\{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\} = \vec{a} + \ker A,$$

kde $\vec{a} \in P$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$ (\vec{a} nazýváme **partikulárním řešením**).

Poznámka 52. Všimněme si, že z předpokladu $\vec{b} \in A(P)$ existence partikulárního řešení \vec{a} plyne.

Důkaz. Dokazujeme rovnost dvou množin, tedy dvě inkluze.

- $\{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\} \subset \vec{a} + \ker A$:
Necht' $A\vec{x} = \vec{b}$ a \vec{a} je partikulární řešení, pak $A(\vec{x} - \vec{a}) = A\vec{x} - A\vec{a} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}_Q$, proto $\vec{x} - \vec{a} \in \ker A$, tedy $\vec{x} \in \vec{a} + \ker A$.
- $\vec{a} + \ker A \subset \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$:
Necht' $\vec{x} \in \vec{a} + \ker A$, pak existuje $\vec{z} \in \ker A$ tak, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{z}$. Pak $A\vec{x} = A(\vec{a} + \vec{z}) = A\vec{a} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0}_Q = \vec{b}$. Proto $\vec{x} \in \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$.

□

Příklad 32. Necht' $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je definované pro každé $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

Už jsme v Příkladu 29 vyšetřili, že $\ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ a že

$$A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Tedy vidíme, že množinu řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ získáme sčítáním partikulárního řešení se všemi možnými vektory z jádra.

5.2 2. věta o dimenzi

Věta 28 (2. věta o dimenzi). Necht' P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a necht' $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a necht' $\dim P < +\infty$. Pak

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

Důkaz. 1. Je-li $h(A) = 0$, pak $\ker A = P$ a tvrzení věty evidentně platí.

2. Je-li $h(A) = k \in \mathbb{N}$, pak existuje $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ báze $A(P)$. Z definice $A(P)$ víme, že pak existují vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$, pro které $\vec{y}_i = A\vec{x}_i$. Podle Poznámky 51 platí, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je LN soubor. Označme $\tilde{P} = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda$ a ukažme, že $\ker A$ je doplněk \tilde{P} do P , tj. $P = \tilde{P} \oplus \ker A$. Pak bude jasné, že $\dim P = k + d(A) = h(A) + d(A)$. Tedy ukážeme:

- (a) $\tilde{P} + \ker A = P$, tj. pro každé $\vec{x} \in P$ existuje $\vec{p} \in \tilde{P}$ a $\vec{q} \in \ker A$ tak, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $A\vec{x} \in A(P)$ a $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ je báze $A(P)$, existují koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in T$ takové, že $A\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i$, pak položíme $\vec{p} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{q} = \vec{x} - \vec{p}$ a ověříme, že $\vec{q} \in \ker A$. $A\vec{q} = A\vec{x} - A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i\right) = A\vec{x} - \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q$, proto skutečně $\vec{q} \in \ker A$.
- (b) $\tilde{P} \oplus \ker A = P$, tj. stačí ověřit $\tilde{P} \cap \ker A = \{\vec{0}_P\}$. Je-li $\vec{x} \in \tilde{P}$, pak existují $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$, a je-li \vec{x} zároveň z $\ker A$, pak $A\vec{x} = A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = \vec{0}_Q$ a z LN $(A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_k)$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{k}$, tedy vektor \vec{x} z průniku je nulový.

□

Příklad 33. *Nebudeme dělat nový příklad, ale nabádáme čtenáře, aby se vrátil k Příkladu 29, kde jsme vyšetřili jádro a hodnotu zobrazení A a B , a zkontroloval, že rovnost z 2. věty o dimenzi pro ně platí.*

Poznámka 53. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $\dim P < +\infty$. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je izomorfní, pak z 2. věty o dimenzi plyne, že $h(A) = \dim P$. A samozřejmě, protože $A(P) = Q$, platí také, že $h(A) = \dim Q$.*

5.3 Izomorfismus

Definice 23. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Řekneme, že P a Q jsou **izomorfní**, píšeme $P \cong Q$, pokud existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.*

Příklad 34. *Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T . Pak $V_n \cong T^n$, protože souřadnicový izomorfismus například ve standardní bázi zobrazuje V_n na T^n .*

U prostorů s konečnou dimenzí je lehké rozhodnout, zda jsou izomorfní.

Věta 29 (Izomorfismus prostorů konečné dimenze). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Pak $P \cong Q$ právě tehdy, když $\dim P = \dim Q$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

(\Rightarrow): Nechť $P \cong Q$, pak existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Z Poznámky 53 plyne, že pak $\dim P = h(A) = \dim Q$.

(\Leftarrow):

1. Pokud $\dim P = \dim Q = 0$, pak je zřejmé, že $P \cong Q$.
2. Nechť $\dim P = \dim Q = n \in \mathbb{N}$, pak existují $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ báze P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ báze Q . Z Věty 26 o zadání lineárního zobrazení pomocí obrazů bazických vektorů víme, že pak existuje právě jedno lineární $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Ukažme, že toto zobrazení je izomorfní, tj. zbývá dokázat, že je prosté a „na“ Q .
 - A je prosté, protože pro libovolný vektor $\vec{x} \in \ker A$, kde $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, platí $A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i = \vec{0}_Q$. Z LN souboru $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$, tedy $\ker A = \{\vec{0}_P\}$.
 - A je „na“ Q , protože

$$A(P) = A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n]_\lambda = Q.$$

□

Věta 30 (Jednodušší ověření izomorfnosti zobrazení). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T , $\dim P < +\infty$ a $\dim P = \dim Q$ a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak A je izomorfní, právě když A je monomorfní nebo A je epimorfní.*

Důkaz. Implikace (\Rightarrow) je zřejmá. Ověřujeme tedy pouze (\Leftarrow):

- Je-li A monomorfní, pak $d(A) = 0$ a z 2. věty o dimenzi plyne, že $h(A) = \dim P$. Protože $\dim P = \dim Q$, máme $h(A) = \dim A(P) = \dim Q$ a zároveň $A(P) \subset\subset Q$. Podle Věty 13 o vlastnostech podprostorů platí $A(P) = Q$, což znamená, že A je „na“ Q .
- Je-li A epimorfní, pak $A(P) = Q$, tedy $h(A) = \dim Q$. Protože $\dim Q = \dim P$, dostáváme z 2. věty o dimenzi, že $d(A) = 0$, tedy $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a A je prosté.

□

Poznámka 54. *Speciálně pro lineární operátory $A \in \mathcal{L}(P)$ na prostorech konečné dimenze předchozí věta říká, že jsou-li prosté, pak už jsou automaticky „na“ P , a jsou-li „na“ P , pak jsou automaticky prosté.*

5.4 Duální báze ***

Věta 31 (Duální báze). *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V nad T . Pak $\mathcal{X}^\# = (\vec{x}_1^\#, \dots, \vec{x}_n^\#)$ je báze $V^\#$ a pro každý $\varphi \in V^\#$ platí*

$$(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \varphi(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. 1. $(\vec{x}_1^\#, \dots, \vec{x}_n^\#)$ je LN:

Nechť pro $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ platí $\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j^\# = \Theta$, pak pro každé $\vec{x} \in V$ máme podle definice sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem (tedy v tomto případě funkcionalů) $(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j^\#)(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j^\#(\vec{x}) = 0$. Dosadíme-li za vektor \vec{x} libovolný bazický vektor \vec{x}_i , dostaneme

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j^\#(\vec{x}_i) = \alpha_i = 0.$$

Odtud plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$.

2. $(\vec{x}_1^\#, \dots, \vec{x}_n^\#)$ generuje $V^\#$:

Nechť $\varphi \in V^\#$ a nechť $\vec{x} \in V$, pak díky linearitě φ máme

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \vec{x}_i^\#(\vec{x}) \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i^\#(\vec{x}) \varphi(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) \vec{x}_i^\#(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) \vec{x}_i^\#\right)(\vec{x}),$$

kde poslední rovnost vychází z definice sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem. Vidíme tedy, že $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) \vec{x}_i^\#$.

3. Tvrzení o souřadnicích $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \varphi(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}$ plyne z předchozího bodu. □

Definice 24. *Bázi $\mathcal{X}^\#$ z předchozí věty nazýváme duální bází k \mathcal{X} .*

5.5 Doplněk podprostoru vektorového prostoru nekonečné dimenze ***

Nyní již máme v ruce aparát, který nám umožní vyšetřit i doplňky podprostorů v prostorech nekonečné dimenze.

Věta 32. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T a alespoň jeden z nich má konečnou dimenzi. Pak $P \cong Q \Leftrightarrow \dim P = \dim Q$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\dim P < +\infty$.

(\Rightarrow):

1. Pokud $\dim P = 0$, pak $P = \{\vec{0}_P\}$. Protože $P \cong Q$, existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a platí $Q = A(P) = \{\vec{0}_Q\}$. Tedy $\dim Q = 0$.
2. Pokud $\dim P = n \in \mathbb{N}$, označme $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bázi P . Protože $P \cong Q$, existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a platí $Q = A(P) = A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$. Jelikož A je prosté, víme, že $(A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n)$ je LN soubor, a tedy $\dim Q = n$.

(\Leftarrow): Plyne z Věty 29. □

Důsledek 4. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T . Pak $P \cong Q \Rightarrow \dim P = \dim Q$.*

Věta 33. *Nechť $P, Q, \hat{Q} \subset V$ nad T . Pak $P \oplus Q = P \oplus \hat{Q} \Rightarrow Q \cong \hat{Q}$.*

Důkaz. Definujme $A : Q \rightarrow \hat{Q}$ pro každé $\vec{q} \in Q$ jako $A\vec{q} = \vec{\hat{q}}$, pokud $\vec{q} = \vec{p} + \vec{\hat{q}}$, kde $\vec{p} \in P$ a $\vec{\hat{q}} \in \hat{Q}$. Díky direktnosti součtu je A opravdu zobrazení. Zbývá ověřit, že A je izomorfismus.

1. A je lineární:

Je-li $\alpha \in T, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$, kde $\vec{q}_1 = \vec{p}_1 + \vec{\hat{q}}_1$ pro $\vec{p}_1 \in P, \vec{\hat{q}}_1 \in \hat{Q}$ a $\vec{q}_2 = \vec{p}_2 + \vec{\hat{q}}_2$ pro $\vec{p}_2 \in P, \vec{\hat{q}}_2 \in \hat{Q}$, pak $\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = (\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha\vec{\hat{q}}_1 + \vec{\hat{q}}_2)$. Proto $A(\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2) = \alpha\vec{\hat{q}}_1 + \vec{\hat{q}}_2 = \alpha A\vec{q}_1 + A\vec{q}_2$.

2. A je prosté:

Uvažujme $\vec{q} \in \ker A$. Pak $A\vec{q} = \vec{0}$, což podle definice A znamená, že $\vec{q} \in P$. Tedy $\vec{q} \in P \cap Q = \{\vec{0}\}$.

3. A je “na \hat{Q} ”:

Je-li $\vec{\hat{q}} \in \hat{Q}$, pak existuje právě jedno $\vec{p} \in P$ a právě jedno $\vec{q} \in Q$ tak, že $\vec{\hat{q}} = \vec{p} + \vec{q}$, pak $\vec{q} = -\vec{p} + \vec{\hat{q}}$. Našli jsme tedy $\vec{q} \in Q$ tak, že $A\vec{q} = \vec{\hat{q}}$.

□

Rozšířme definici doplňku i pro podprostory vektorových prostorů nekonečné dimenze.

Definice 25. *Nechť $P \subset V$. Nechť $Q \subset V$ splňuje $P \oplus Q = V$. Pak Q nazveme **doplňk** P do V a $\dim Q$ nazveme **kodimenzí** $\text{codim } P$.*

Poznámka 55. *Korektnost definice kodimenze plyne z Věty 33 a Důsledku 4.*

Příklad 35. *Uveďme příklad podprostoru nekonečné dimenze a doplňku konečné dimenze. Nechť $P \subset \mathcal{P}$ a P obsahuje polynomy s nulovým konstantním členem. Pak $Q = [e_1]_\lambda$ je doplňk P do \mathcal{P} .*

Příklad 36. *Uveďme příklad podprostoru nekonečné dimenze a doplňku nekonečné dimenze. Nechť $P \subset \mathcal{P}$ a P obsahuje polynomy s nulovými koeficienty u lichých mocnin proměnné. Pak Q tvořený polynomy s nulovými koeficienty u sudých mocnin je doplňk P do \mathcal{P} .*

Věta 16 říká, že pokud V má konečnou dimenzi, pak doplňk ke každému podprostoru existuje.

Věta 34 (Hodnost a kodimenze jádra). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $h(A) < +\infty$. Pak*

$$h(A) = \text{codim } \ker A.$$

Důkaz. 1. Nechť $h(A) = 0$, pak $A = \Theta$, tedy $P = \ker A \oplus \{\vec{0}_P\}$ a $\text{codim } \ker A = 0$.

2. Nechť $h(A) = n \in \mathbb{N}$, pak existuje báze $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ $A(P)$. Najdeme $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P$ tak, že $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Víme, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je pak LN. Ukážeme-li, že $P = \ker A \oplus [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak bude rovnost $h(A) = \text{codim } \ker A$ dokázána. Ověříme:

(a) $P = \ker A + [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$:

Inkluze $\ker A + [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset P$ je zřejmá. Ukažme $P \subset \ker A + [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Uvažujme $\vec{x} \in P$, pak s využitím báze $A(P)$ a linearit A máme $A\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i)$ a odtud $A(\vec{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \vec{0}_Q$, proto $\vec{x} \in \ker A + [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

(b) $\ker A \cap [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = \{\vec{0}_P\}$:

Je-li $\vec{x} \in \ker A$, pak $A\vec{x} = \vec{0}_Q$. Je-li zároveň $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, pak $A\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i$. Z LN souboru $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ pak dostaneme $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$, tedy máme ověřeno, že $\vec{x} = \vec{0}_P$.

□

Věta 34 umožňuje zjednodušit důkaz 2. věty o dimenzi.

*Jednodušší důkaz 2. věty o dimenzi. ****

Dokažme nejprve, že z konečnosti dimenze P plyne $h(A) < +\infty$.

1. Je-li $\dim P = 0$, pak $A(P) = A(\{\vec{0}_P\}) = \{\vec{0}_Q\}$, proto $h(A) = 0$.
2. Je-li $\dim P = n \in \mathbb{N}$ a označíme-li $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bázi P , pak $A(P) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$, odkud plyne, že $h(A) \leq n$.

Jelikož je $h(A) < +\infty$, máme podle Věty 34

$$d(A) + h(A) = \dim \ker A + \operatorname{codim} \ker A = \dim P.$$

□

5.6 Projektor ***

Věta 35 (Projektor). *Nechť $P, Q \subset V$ a $P \oplus Q = V$. Definujme $A : V \rightarrow P$ jako $A\vec{x} = \vec{p}$, kde $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$ a $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$. Pak $A \in \mathcal{L}(V, P)$ a platí*

1. $A\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} \in P$,
2. $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in Q$.

Důkaz. Ověříme linearitu A . Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $\alpha \in T$. Pokud $\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$, kde $\vec{p}_1 \in P$ a $\vec{q}_1 \in Q$, a $\vec{y} = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$, kde $\vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_2 \in Q$, pak $\alpha\vec{x} + \vec{y} = (\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2)$. Dostáváme $A\alpha\vec{x} = \alpha\vec{p}_1$, $A\vec{y} = \vec{p}_2$ a $A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}$. Zbývající dvě vlastnosti plynou bezprostředně z definice. □

Definice 26. *Zobrazení z Věty 35 značíme A_P a nazýváme **projektor** na podprostor P podle podprostoru Q .*

Příklad 37. *Uveďme příklad lineárního zobrazení – projektoru – na nekonečně dimenzionálním prostoru, ovšem s konečnou hodnotí. A ilustrujme pro něj platnost rovnosti $h(A) = \operatorname{codim} \ker A$. Nechť $P \subset \mathcal{P}$ a P obsahuje polynomy s nulovým konstantním členem. Pak už z předchozího příkladu víme, že $Q = [e_1]_\lambda$ je doplněk P do \mathcal{P} . Hodnota $h(A_Q) = \dim Q = 1$ a $\ker A = P$. Tedy skutečně $h(A) = \operatorname{codim} \ker A$.*

5.7 Matice a lineární zobrazení

Již známe $T^{m,n}$ vektorový prostor matic s prvky z tělesa T o m řádcích a n sloupcích. Víme, že sčítání matic a násobení matice číslem z T je definováno po prvcích. Nyní zavedeme další operaci - násobení matic.

Definice 27. *Nechť \mathbb{A} je matice typu $m \times n$ a \mathbb{B} typu $n \times p$ s prvky z T . Pak **součinem** \mathbb{A} a \mathbb{B} nazveme matici typu $m \times p$, značíme ji $\mathbb{A}\mathbb{B}$, definovanou*

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} \quad \text{pro každé } i \in \hat{m}, j \in \hat{p}.$$

Příklad 38. *Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pak $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 17 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.*

Věta 36 (Vlastnosti násobení matic). *Násobení matic*

1. je asociativní, tj. nechť \mathbb{A} je matice typu $m \times n$, \mathbb{B} typu $n \times p$ a \mathbb{C} typu $p \times s$ s prvky z T , pak $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$,
2. je distributivní, tj. nechť \mathbb{A} je matice typu $m \times n$, \mathbb{B} a \mathbb{C} typu $n \times p$ s prvky z T , pak $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$,

3. není obecně komutativní, ani když násobíme čtvercové matice, tj. existují čtvercové matice \mathbb{A} a \mathbb{B} s prvky z T takové, že $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Důkaz. 1. Zkontrolujeme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je typu $m \times p$. Proto matice $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}$ je typu $m \times s$. Jelikož $\mathbb{B}\mathbb{C}$ je typu $n \times s$, je $\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$ typu $m \times s$.

Nyní stačí ukázat, že pro každé $i \in \hat{m}$ a $j \in \hat{s}$ platí $[(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}]_{ij} = [\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})]_{ij}$. Podle definice násobení matic a prací se sumami dostaneme následující rovnosti:

$$\begin{aligned} [(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}]_{ij} &= \sum_{k=1}^p [\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ik} [\mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\ell=1}^n [\mathbb{A}]_{i\ell} [\mathbb{B}]_{\ell k} \right) [\mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\ell=1}^n [\mathbb{A}]_{i\ell} [\mathbb{B}]_{\ell k} [\mathbb{C}]_{kj} \right) = \\ &= \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^p [\mathbb{A}]_{i\ell} [\mathbb{B}]_{\ell k} [\mathbb{C}]_{kj} \right) = \sum_{\ell=1}^n [\mathbb{A}]_{i\ell} \sum_{k=1}^p [\mathbb{B}]_{\ell k} [\mathbb{C}]_{kj} = \sum_{\ell=1}^n [\mathbb{A}]_{i\ell} [\mathbb{B}\mathbb{C}]_{\ell j} = [\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})]_{ij}. \end{aligned}$$

Ve třetí rovnosti jsme roznásobili vnitřní sumu, ve čtvrté rovnosti jsme zaměnili sumy a v páté rovnosti jsme vytýkali z vnitřní sumy.

2. Zkontrolujeme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{B} + \mathbb{C}$ je typu $n \times p$, proto $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})$ je typu $m \times p$. Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ i $\mathbb{A}\mathbb{C}$ jsou typu $m \times p$, proto jejich součet $\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$ je také typu $m \times p$.

Nyní stačí ověřit, že pro každé $i \in \hat{m}$ a $j \in \hat{p}$ platí $[\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})]_{ij} = [\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij}$. Podle definice násobení a sčítání matic dostaneme následující rovnosti:

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [\mathbb{A}]_{ik} [\mathbb{B} + \mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^n [\mathbb{A}]_{ik} ([\mathbb{B}]_{kj} + [\mathbb{C}]_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^n [\mathbb{A}]_{ik} [\mathbb{B}]_{kj} + \sum_{k=1}^n [\mathbb{A}]_{ik} [\mathbb{C}]_{kj} = [\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ij} + [\mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij} = [\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij}. \end{aligned}$$

3. Je-li \mathbb{A} typu $m \times n$ a \mathbb{B} typu $n \times p$, pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je typu $m \times p$. Aby $\mathbb{B}\mathbb{A}$ existovala, musí být $m = p$, rozměr $\mathbb{B}\mathbb{A}$ je pak $n \times n$. Aby $\mathbb{A}\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A}$ měly stejný rozměr, musí být tedy $m = p = n$, neboli \mathbb{A} a \mathbb{B} musí být čtvercové matice stejného řádu.

Ani tehdy ale nemusí rovnost platit. Například pro $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. □

Poznámka 56. Při znalosti násobení matic lze soustavu m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

zapsat maticovým (vektorovým) zápisem jako $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definice 28. Necht' P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T (indexy značí dimenzi). Necht' $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a necht' $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P_n a \mathcal{Y} je báze Q_m . Pak matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$, jejíž j -tý sloupec je definován jako $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$, nazýváme **matice zobrazení A v bázích \mathcal{X} a \mathcal{Y}** .

Poznámka 57. Označme $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ bázi \mathcal{Y} , pak lze popsat prvky matice pomocí souřadnicových funkcionalů v bázi \mathcal{Y} . Pro každé $i \in \hat{m}$ a $j \in \hat{n}$ platí

$$[\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}]_{ij} = \vec{y}_i^{\#}(A\vec{x}_j).$$

Poznámka 58. Chceme-li zapsat $\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}$ naráz jako matici, můžeme psát $\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}})$, kde čárkami oddělujeme jednotlivé sloupce matice.

Věta 37 (Vlastnosti matice zobrazení v bázích). *Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a necht' $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P_n a \mathcal{Y} je báze Q_m . Necht' $\alpha \in T$. Pak platí:*

1. $\mathcal{X}(A+B)^{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}A^{\mathcal{Y}} + \mathcal{X}B^{\mathcal{Y}}$,
2. $\mathcal{X}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha \mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}$.

Důkaz. 1. Porovnáme j -té sloupce matic pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[\mathcal{X}(A+B)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = ((A+B)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (A\vec{x}_j + B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} + (B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = [\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} + [\mathcal{X}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = [\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}} + \mathcal{X}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Ve druhé rovnosti jsme užili definici součtu zobrazení, ve třetí aditivitu souřadnicového izomorfismu v bázi \mathcal{Y} , v poslední definici sčítání matic a v první a předposlední rovnosti definici matice zobrazení.

2. Porovnáme j -té sloupce matic pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[\mathcal{X}(\alpha A)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = ((\alpha A)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (\alpha(A\vec{x}_j))_{\mathcal{Y}} = \alpha(A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = \alpha[\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = [\alpha \mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Ve druhé rovnosti jsme užili definici násobení zobrazení číslem, ve třetí homogenity souřadnicového izomorfismu v bázi \mathcal{Y} , v poslední definici násobení matice číslem a v první a předposlední rovnosti definici matice zobrazení. □

Věta 38 (Výpočet obrazu vektoru pomocí matice v bázích). *Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht' $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a necht' \mathcal{X} je báze P_n a \mathcal{Y} je báze Q_m . Necht' $\vec{x} \in P_n$. Pak platí $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.*

Důkaz. $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ je vektor z T^m a $\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ je součin matic typu $m \times n$ a $n \times 1$, jde tedy o matici z $T^{m,1} = T^m$. Rozměry jsou tedy shodné.

Označme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ bázi \mathcal{X} a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Pak

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (A(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n))_{\mathcal{Y}} = (\alpha_1A\vec{x}_1 + \alpha_2A\vec{x}_2 + \dots + \alpha_nA\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}} = \alpha_1(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} + \alpha_2(A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} + \dots + \alpha_n(A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}.$$

Ve druhé rovnosti jsme využili linearitu A a ve třetí rovnosti linearitu souřadnicového izomorfismu v bázi \mathcal{Y} . Nyní už stačí si rozmyslet podle definice násobení matic, že

$$\alpha_1(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} + \alpha_2(A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} + \dots + \alpha_n(A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

□

Poznámka 59. *Věta 38 o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích umožňuje přeformulovat úlohu řešit rovnici $A\vec{x} = \vec{b}$ na řešení soustavy LAR.*

Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht' $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a necht' \mathcal{X} je báze P_n a \mathcal{Y} je báze Q_m . Dále necht' $\vec{b} \in A(P_n)$ a necht' je zadána matice zobrazení $\mathcal{X}A^{\mathcal{Y}}$. Z Věty 27 o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \ker A$, kde \vec{a} je partikulární řešení.

1. $\ker A$: Z hodnoty $h(A)$, kterou umíme z matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ určit, spočítáme defekt $d(A)$ a poté najdeme bázi jádra následujícím způsobem:

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (\vec{0})_{\mathcal{Y}},$$

jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, stačí najít $d(A)$ LN řešení homogenní soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Tím získáme souřadnice bazických vektorů z jádra v bázi \mathcal{X} .

2. Partikulární řešení \vec{a} :

$$A\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = (\vec{b})_{\mathcal{Y}},$$

jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{a})_{\mathcal{X}}$, najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ a pravou stranou $(\vec{b})_{\mathcal{Y}}$.

Příklad 39. Necht' $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze \mathbb{R}^3 a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ má matici

v bázi \mathcal{X} rovnu ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, kde ${}^{\mathcal{X}}A$ je kratší zápis ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$. Najděte všechna řešení

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. $\ker A$: Z matice ${}^{\mathcal{X}}A$ vidíme, že

$$\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

proto

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$h(A) = \dim A(\mathbb{R}^3) = \dim A \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} = \dim \left[A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} =$$

$$\dim \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} = 2, \text{ proto } d(A) = 1.$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{0})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, stačí najít 1 LN řešení homogenní soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Takovým řešením je např. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Odtud máme $\ker A = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$.

2. Partikulární řešení \vec{a} :

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{X}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}},$$

jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{a})_{\mathcal{X}}$, najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A$ a pravou stranou $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Takovým řešením je např. $(\vec{a})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Závěr: $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\lambda}$.

Věta 39 (Matice složeného zobrazení). Necht P_n, Q_m, V_s jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$ a $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Necht \mathcal{X} je báze P_n , \mathcal{Y} je báze Q_m a \mathcal{Z} je báze V_s . Pak

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Důkaz. Zkontrolujme nejprve rozměry matic. ${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times n$. ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times m$ a ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$ je typu $m \times n$, proto jejich součin je typu $s \times n$.

Ověřme rovnost j -tých sloupců pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[{}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}]_{\bullet j} = ((AB)\vec{x}_j)_{\mathcal{Z}} = (A(B\vec{x}_j))_{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = [{}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Předposlední rovnost plyne z Věty 38 o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích, a uvědomíme-li si, že $(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$ je j -tý sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$, plyne poslední rovnost z definice násobení matic (j -tý sloupec součinu dvou matic se totiž získá jako součin první matice s j -tým sloupcem druhé matice). \square

Poznámka 60. Věta 39 o matici složeného zobrazení umožňuje pomocí “vnášení identity” mechanické převody matice zobrazení v nějakých bázích na matici zobrazení v jiných bázích.

Příklad 40. Necht $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$ jsou báze \mathbb{R}^3 a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ má matici v bázi \mathcal{X} rovnu ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte

1. ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,
2. ${}^{\mathcal{Y}}B$.

Použijeme metodu “vnášení identity”, kde využíváme Větu 39 o matici složeného zobrazení. I značí identický operátor na \mathbb{R}^3 . Jistě tedy platí $B = IB = BI$.

1. ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}(IB)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{X}}$, jelikož ${}^{\mathcal{X}}B$ známe, zbývá určit ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = ((\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, (\vec{x}_3)_{\mathcal{Y}}) = ((\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})_{\mathcal{Y}}, (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})_{\mathcal{Y}}, (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})_{\mathcal{Y}}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Závěr: ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. ${}^{\mathcal{Y}}B = {}^{\mathcal{Y}}(IB)^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} {}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} {}^{\mathcal{Y}}(BI)^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{X}} {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$, jelikož ${}^{\mathcal{X}}B$ a ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ známe, zbývá určit ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = ((\vec{y}_1)_{\mathcal{X}}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}}) = ((\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}}, (\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}}, (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Závěr: } \mathcal{Y}_B &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 0 & -10 & 4 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Úlohu lze řešit i bez využití Věty 39. Zkuste sami vymyslet takový postup.

6 Lineární geometrie ***

V této kapitole zobecníme poznatky ze střední školy týkající se analytické geometrie. Uvažujeme vektorový prostor V nad tělesem T , jeho prvky nebudeme nazývat výhradně vektory, ale častěji budeme hovořit o bodech.

6.1 Lineární variety

K definici lineární variety potřebujeme pojem spojnice bodů.

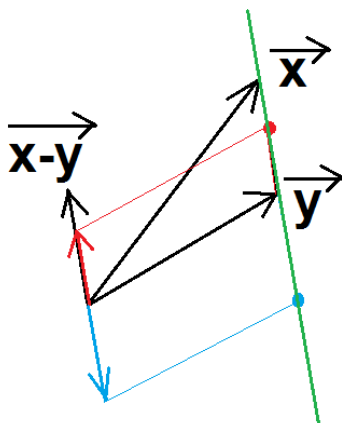
Definice 29. Necht $\vec{x}, \vec{y} \in V$. **Spojnicí** bodů \vec{x} a \vec{y} nazveme množinu

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in T\}.$$

Poznámka 61. Uvedme ekvivalentní zápisy spojnice

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in T\} = \{\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \mid \alpha \in T\} = \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in T\}.$$

Z posledního zápisu je vidět, že spojnicí bodů \vec{x}, \vec{y} získáme přičítáním reálných násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru \vec{y} . Tedy v \mathbb{R}^2 odpovídá spojnice tomu, co si pod tímto pojmem každý představí – přímce procházející body \vec{x} a \vec{y} , viz obrázek 4.



Obrázek 4: Zeleně vyznačena spojnice bodů \vec{x} a \vec{y} v \mathbb{R}^2 .

Definice 30. Necht $W \subset V$. W nazveme **lineární varietou**, pokud

- $W \neq \emptyset$,
- W obsahuje s každými dvěma body i jejich spojnicí.

Příklad 41. Lineární variety v \mathbb{R}^2 jsou body, přímky, celé \mathbb{R}^2 . Lineární variety v \mathbb{R}^3 jsou body, přímky, roviny a celé \mathbb{R}^3 . Za nedlouho ukážeme, že tento výčet je úplný, tj. že žádné jiné variety v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 neexistují.

6.2 Afinní obaly

S pojmem spojnice úzce souvisí pojem afinní kombinace.

Definice 31. Necht $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V . Pak **afinní kombinací** (AK) souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$ a $\alpha_k \in T$ pro každé $k \in$

$\hat{\ell}$. Množinu všech afinních kombinací souboru nazýváme **afinní obal** souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Platí tedy

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \mid \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1 \text{ a } \alpha_k \in T \text{ pro každé } k \in \hat{\ell} \right\}.$$

Příklad 42. Přímo z definice plyne, že afinní obal dvou vektorů je roven jejich spojnici.

Souvislost afinních obalů a lineárních variet je následující.

Věta 40 (Afinní obal je varieta). *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V . Pak $W = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta a W obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Protože $\vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + 0\vec{x}_\ell$ pro každé $i \in \hat{\ell}$, je \vec{x}_i afinní kombinací souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$, tedy platí $\vec{x}_i \in W$. Proto $W \neq \emptyset$. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_\ell \in T$ takové, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = 1$. Pro libovolné $\alpha \in T$ je třeba ukázat, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W$.

$$\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1 - \alpha)\beta_i) \vec{x}_i,$$

kde poslední výraz je afinní kombinace souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$, protože

$$\sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1 - \alpha)\beta_i) = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = \alpha + (1 - \alpha) = 1.$$

Tím je dokázáno, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W$ pro libovolné $\alpha \in T$, tedy spojnice \vec{x} a \vec{y} je z W , tedy W je lineární varieta. □

Věta 41 (Varieta obsahuje afinní kombinace). *Nechť W je lineární varieta. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \in W$. Pak*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha \subset W.$$

Slovy: „Lineární varieta obsahuje s každou ℓ -ticí svých bodů i jejich libovolnou afinní kombinaci.“

Důkaz. Tvzení dokážeme indukcí podle počtu vektorů ℓ . Pro $\ell = 1$ triviálně platí. Nechť pro nějaké $\ell \geq 1$ platí, že W s každou ℓ -ticí svých vektorů obsahuje i jejich libovolnou afinní kombinaci. Uvažujme nyní $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell+1} \in W$ a jejich libovolnou afinní kombinaci $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i$, kde $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i = 1$. Určitě existuje index $i_0 \in \widehat{\ell+1}$ takový, že $\alpha_{i_0} \neq 1$. Pak můžeme psát

$$\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} \vec{x}_i,$$

kde $\vec{y} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} \vec{x}_i$ je afinní kombinace ℓ vektorů, protože $\sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} = 1$, tedy $\vec{y} \in W$. Dále $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0})\vec{y}$ je vektor ze spojnice \vec{x}_{i_0} a \vec{y} , tedy závěrem $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i \in W$. □

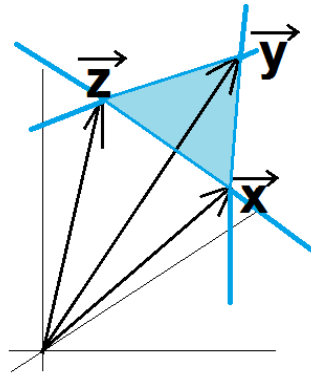
Věta 42 (Minimalita afinního obalu). *Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \in V$. Pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je nejmenší lineární varieta obsahující $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Z Věty 41 víme, že každá lineární varieta obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Jelikož zároveň z Věty 40 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta, máme dokázáno, že je to nejmenší lineární varieta obsahující dané vektory. □

Příklad 43. Podle Věty 42 je řešením úlohy najít minimální lineární varietu W , která obsahuje vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, afinní obal $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_{\alpha}$.

Příklad 44. Pomocí Věty 42 si snadno rozmyslíte, jak vypadají afinní obaly jednoho, dvou, tří vektorů v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 . Např. $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_{\alpha}$, kde \vec{x}, \vec{y} a \vec{z} neleží v jedné přímce, tvoří rovinu obsahující \vec{x}, \vec{y} a \vec{z} .

Vysvětlení: Jelikož jde o lineární varietu, musí W obsahovat spojnice \vec{x} a \vec{y} , \vec{x} a \vec{z} , \vec{y} a \vec{z} . Dále musí W také obsahovat spojnice bodů ze tří výše uvedených spojnic. Tedy W obsahuje rovinu, v níž leží trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, viz obrázek 5. Jelikož rovina už je lineární varieta, našli jsme nejmenší lineární varietu obsahující $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tedy jsme našli $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_{\alpha}$.



Obrázek 5: Afinní obal 3 vektorů v \mathbb{R}^2 , které neleží v jedné přímce, je rovina obsahující trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi lineárními varietami a afinními obaly napadnout, zní: “Je každá lineární varieta afinním obalem nějakého souboru vektorů?” Odpověď zní: ANO, má-li V konečnou dimenzi, NE, je-li $\dim V = +\infty$. Ale musíme nejprve prostudovat vztah mezi varietami a posunutými podprostory, abychom odpověď mohli zdůvodnit.

6.3 Lineární variety jako posunuté podprostory

Následující dvě věty vysvětlují, že variety nepředstavují nic zcela nového, ale jde jen o posunuté podprostory.

Věta 43 (Posunutý podprostor je varieta). *Nechť $P \subset\subset V$ a $\vec{a} \in V$, pak $W = \vec{a} + P$ je lineární varieta.*

Důkaz.

- $W \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P$, tedy $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \in W$,
- je-li $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ takové, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}_1$ a $\vec{y} = \vec{a} + \vec{p}_2$, pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ pak platí $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} = \vec{a} + \alpha\vec{p}_1 + (1 - \alpha)\vec{p}_2 \in \vec{a} + P$.

□

Příklad 45. Speciálně je podle předchozí věty každý podprostor lineární varietou.

Věta 44 (Varieta je posunutý podprostor). *Nechť W je lineární varieta ve V , pak existuje právě jeden $P \subset\subset V$ takový, že pro každé $\vec{a} \in W$ platí $W = \vec{a} + P$.*

Důkaz. Postup bude mít tři kroky.

1. Existence podprostoru:

Berme libovolné $\vec{a} \in W$. Položme $P = W - \vec{a} = \{\vec{x} - \vec{a} \mid \vec{x} \in W\}$. Ukážeme, že $P \subset\subset V$.

(a) $P \neq \emptyset$, protože $\vec{0} = \vec{a} - \vec{a} \in P$.

(b) Je-li $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ a $\alpha \in T$, pak existují $\vec{x}, \vec{y} \in W$ takové, že $\vec{p}_1 = \vec{x} - \vec{a}$, $\vec{p}_2 = \vec{y} - \vec{a}$. Pak

$$\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (\alpha\vec{x} - \alpha\vec{a} + \vec{y}) - \vec{a} \in W - \vec{a},$$

kde jsme využili faktu, že $\alpha\vec{x} - \alpha\vec{a} + \vec{y}$ je afinní kombinace vektorů z variety, což je podle Věty 41 opět vektor z variety.

2. Libovolná volba vektoru $\vec{a} \in W$:

Nechť $\vec{b} \in W$. Podle předchozího bodu existuje $\vec{p} \in P$ takový, že $\vec{b} = \vec{a} + \vec{p}$. Odtud máme $\vec{b} + P = \vec{a} + \vec{p} + P = \vec{a} + P = W$.

3. Jednoznačnost podprostoru:

Předpokládejme, že podprostor $Q \subset\subset V$ splňuje $W = \vec{a} + Q$. Zároveň víme, že $W = \vec{a} + P$. Odtud je zřejmé, že $Q = P$.

□

Důsledek 5. *Nechť W je lineární varieta ve V . Pak W je podprostor V , právě když $\vec{0} \in W$.*

Definice 32. *Podprostor z předchozí věty nazveme **zaměřením variety W** a značíme $\mathcal{Z}(W)$. Vektor \vec{a} ve vyjádření $\vec{a} + P = W$ nazýváme **vektorem posunutí**. Nenulové vektory ze $\mathcal{Z}(W)$ nazýváme **směrové vektory variety W** . **Dimenzí variety $dim W$** nazveme $dim \mathcal{Z}(W)$. Analogicky **codimenzí variety $codim W$** nazveme $codim W = codim \mathcal{Z}(W)$. Na základě dimenze zobecníme ve V pojmy bod, přímka, rovina:*

- je-li $dim W = 0$, pak W nazýváme **bod**,
- je-li $dim W = 1$, pak W nazýváme **přímka**,
- je-li $dim W = 2$, pak W nazýváme **rovina**.
- je-li $codim W = 1$, pak W nazýváme **nadrovina**.

Poznámka 62. *V Příkladu 50 jsme vyjmenovali všechny možné posunutě podprostory v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 . Podle Věty 44 jde o úplný výčet lineárních variet v těchto prostorech.*

Definice 33. *Nechť W je lineární varieta ve V . Nechť $\vec{a} \in W$ a nechť $dim W = \ell \in \mathbb{N}$. Označme $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ bázi $\mathcal{Z}(W)$, potom zřejmě*

$$W = \{\vec{x} \in V \mid (\exists t_1, \dots, t_\ell \in T)(\vec{x} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{\ell} t_i \vec{x}_i)\}.$$

Rovnici $\vec{x} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{\ell} t_i \vec{x}_i$ nazýváme **směrovou rovnicí variety W** . Je-li $dim V$ konečná a rozepíšeme-li směrovou rovnici po souřadnicích ve zvolené bázi V , dostaneme **parametrické rovnice variety W** ve zvolené bázi.

Příklad 46. *Nechť W je přímka v \mathbb{R}^2 . Nechť $\mathcal{Z}(W) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ je vektor posunutí. Pak*

1. Směrová rovnice W :

$$W \equiv \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Parametrické rovnice W ve standardní bázi:

$$W \equiv \begin{matrix} x & = & 1 + t \\ y & = & 1 \end{matrix},$$

$$\text{kde } (\vec{x})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

6.4 Vzájemná poloha, průnik, příčka, LK, obrazy a vzory lineárních variet

Definice 34. Necht W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Říkáme, že jsou

1. rovnoběžné, pokud $\mathcal{Z}(W_1) \subset \mathcal{Z}(W_2)$ nebo $\mathcal{Z}(W_2) \subset \mathcal{Z}(W_1)$,
2. mimoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$,
3. různoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Věta 45 (Průnik variet). Necht W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Pak průnik $W_1 \cap W_2$ je \emptyset , nebo lineární varieta.

Důkaz. Prázdný průnik jistě variety mít mohou. Například rovnoběžné a různé přímky v prostoru \mathbb{R}^2 . Předpokládejme, že $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Ukážeme, že pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$ a pro libovolné $\alpha \in T$, platí $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. Jelikož $\vec{x}, \vec{y} \in W_1$, je také $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_1$. Podobně $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$, proto také $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_2$. Odtud plyne, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. \square

Poznámka 63. Tvzení Věty 45 lze zobecnit na průnik libovolného počtu variet. Dokažte sami.

Definice 35. Necht W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Necht $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Pak přímku W nazveme **příčkou** variet W_1, W_2 , pokud $W \cap W_1 \neq \emptyset$ a $W \cap W_2 \neq \emptyset$.

Věta 46 (LK variet). Necht W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Necht $\alpha, \beta \in T$. Potom $\alpha W_1 + \beta W_2 = \{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \vec{x} \in W_1, \vec{y} \in W_2\}$ je také lineární varieta ve V a platí $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\mathcal{Z}(W_2)$.

Důkaz. Necht $\vec{a} \in W_1$ a $\vec{b} \in W_2$, pak

$$\alpha W_1 + \beta W_2 = \alpha\vec{a} + \alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\vec{b} + \beta\mathcal{Z}(W_2) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + (\alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\mathcal{Z}(W_2)),$$

odkud plyne, že jde o varietu se zaměřením $\alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\mathcal{Z}(W_2)$. \square

Poznámka 64. Rozmyslete si, že pro zaměření variety $\alpha W_1 + \beta W_2$ platí:

1. Pokud $\alpha = \beta = 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \{\vec{0}\}$.
2. Pokud $\alpha = 0$ a $\beta \neq 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_2)$.
3. Pokud $\alpha \neq 0$ a $\beta = 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_1)$.
4. Pokud $\alpha \neq 0$ a $\beta \neq 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)$.

Věta 47 (Obraz variety). Necht P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht W je lineární varieta v P . Pak $A(W)$ je lineární varieta v Q a platí $\mathcal{Z}(A(W)) = A(\mathcal{Z}(W))$.

Důkaz. Necht $\vec{a} \in W$. Pak $A(\vec{a} + \mathcal{Z}(W)) = A\vec{a} + A(\mathcal{Z}(W))$. Jelikož homomorfní obraz podprostoru je podprostor, vidíme, že jde o varietu se zaměřením $A(\mathcal{Z}(W))$. \square

Věta 48 (Vzor variety). Necht P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht W je lineární varieta v Q . Pak $A^{-1}(W)$ je prázdná množina, nebo lineární varieta v P . Je-li $A^{-1}(W) \neq \emptyset$, pak platí $\mathcal{Z}(A^{-1}(W)) = A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.

Důkaz. $A^{-1}(W)$ může být prázdná množina (např. pro $A = \Theta$ a varietu W , která není podprostorem). Necht v dalším $A^{-1}(W) \neq \emptyset$. Pro $\vec{a} \in A^{-1}(W)$, platí $A\vec{a} \in W$. Proto $W = A\vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. Ukažme, že $A^{-1}(W) = \vec{a} + A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$, pak bude jasné, že $A^{-1}(W)$ je lineární varieta se zaměřením $A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in A^{-1}(W) &\Leftrightarrow A\vec{x} \in W \Leftrightarrow A\vec{x} \in A\vec{a} + \mathcal{Z}(W) \Leftrightarrow A(\vec{x} - \vec{a}) \in \mathcal{Z}(W) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{x} - \vec{a} \in A^{-1}(\mathcal{Z}(W)) \Leftrightarrow \vec{x} \in \vec{a} + A^{-1}(\mathcal{Z}(W)). \end{aligned}$$

\square

Příklad 47. POZOR! $A^{-1}(\vec{a} + \mathcal{Z}(W)) \neq A^{-1}(\vec{a}) + A^{-1}(\mathcal{Z}(W))!!!$

Nechť $\Theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (nulový operátor) a $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})]_\lambda$ (osa prvního a třetího kvadrantu). Pak

$$\Theta^{-1}(W) = \mathbb{R}^2,$$

ale

$$\Theta^{-1}(W) \neq \Theta^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) + \Theta^{-1}([\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda),$$

protože $\Theta^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \emptyset$.

6.5 Lineární variety jako afinní obaly

Vysvětleme vztah mezi lineárním a afinním obalem.

Věta 49 (Lineární obal a afinní obal). Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V . Pak platí

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda.$$

Poznámka 65. Sami si rozmyslete, že také platí pro libovolný index $i_0 \in \hat{\ell}$

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \vec{x}_{i_0} + [\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}]_\lambda.$$

Důkaz. Ukazujeme rovnost dvou množin, tedy dvě inkluze.

$[\]_\alpha \subset \vec{x}_1 + [\]_\lambda$: Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$, tj. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$. Pak

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \alpha_i (\vec{x}_i - \vec{x}_1) \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda.$$

$\vec{x}_1 + [\]_\lambda \subset [\]_\alpha$: Nechť $\vec{x} \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda$, tj. $\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i (\vec{x}_i - \vec{x}_1)$. Pak platí

$$\vec{x} = (1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i) \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i,$$

přičemž poslední výraz je afinní kombinací souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$, protože součet koeficientů u jednotlivých vektorů v lineární kombinaci je $(1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i) + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i = 1$, tedy $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. \square

Důsledek 6. Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell \in V$ a necht' $i_0 \in \hat{\ell}$. Pak platí

1. $\mathcal{Z}([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha) = [\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}]_\lambda$,
2. $\dim [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha \leq \ell - 1$.

Definice 36. Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V . **Afinní hodnosti** souboru nazveme

$$h_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell) = \dim [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha.$$

Říkáme, že soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ je

1. **afinně nezávislý** (AN), pokud $h_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell) = \ell - 1$,
2. **afinně závislý** (AZ), pokud $h_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell) < \ell - 1$.

Poznámka 66. 1. Každý 1-členný soubor je AN.

2. Pro $\ell \geq 2$ a $i_0 \in \hat{\ell}$ platí:

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell) \text{ je AN} \Leftrightarrow (\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_{i_0-1} - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_{i_0+1} - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}) \text{ je LN.}$$

Věta 50. *Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V , $\ell \geq 2$. Pak $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ je AZ, právě když existuje $i_0 \in \hat{\ell}$ tak, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$.*

Důkaz. (\Rightarrow): $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ je AZ, proto $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1)$ je LZ. Existují tedy čísla $\alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ taková, že $\sum_{i=2}^\ell \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1) = \vec{0}$ a zároveň existuje $i_0 \in \{2, \dots, \ell\}$ tak, že $\alpha_{i_0} \neq 0$. Odtud dostáváme

$$-\alpha_{i_0}(\vec{x}_{i_0} - \vec{x}_1) = \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1).$$

Proto

$$\vec{x}_{i_0} = \frac{-1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \alpha_i \vec{x}_i + \frac{-1}{\alpha_{i_0}} \left(-\alpha_{i_0} - \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \alpha_i \right) \vec{x}_1.$$

Jelikož

$$\frac{-1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \alpha_i + \frac{-1}{\alpha_{i_0}} \left(-\alpha_{i_0} - \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \alpha_i \right) = 1,$$

je dokázáno, že \vec{x}_{i_0} je AK souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_\ell)$.

(\Leftarrow): $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$, tedy existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_\ell$ taková, že $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^\ell \alpha_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1, i \neq i_0}^\ell \alpha_i = 1$. Odtud dostáváme

$$\vec{0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^\ell \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_{i_0}),$$

a jelikož aspoň jeden z koeficientů LK je nenulový, je $(\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_{i_0-1} - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_{i_0+1} - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0})$ LZ, tedy $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ AZ. □

Poznámka 67. *Rozmyslete si, že AN soubory v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 vypadají následovně:*

- 1-členný soubor je vždy AN,
- 2-členný soubor (\vec{x}, \vec{y}) je AN $\Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{y}$,
- 3-členný soubor $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je AN $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ a \vec{z} neleží v jedné přímce,
- 4-členný soubor $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u})$ je v \mathbb{R}^2 AZ a v \mathbb{R}^3 je AN $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$ neleží v jedné rovině.

Na závěr kapitoly zodpovíme otázku, zda je každá lineární varieta afinním obalem.

Věta 51 (Varieta konečné dimenze je afinní obal). *Nechť W je lineární varieta ve V a $\dim W = \ell - 1$, $\ell \in \mathbb{N}$. Pak existují vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_\ell$ takové, že*

$$W = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_\ell]_\alpha.$$

Důkaz. Z Věty 44 plyne, že existuje podprostor $\mathcal{Z}(W)$ dimenze $\ell - 1$ takový, že $W = \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$, kde $\vec{a} \in W$. Buď je $\mathcal{Z}(W) = \{\vec{0}\}$, pak $W = [\vec{a}]_\alpha$, nebo existuje báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell-1})$ podprostoru $\mathcal{Z}(W)$. Pak je podle Věty 49

$$W = \vec{a} + [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell-1}]_\lambda = [\vec{a}, \vec{a} + \vec{x}_1, \vec{a} + \vec{x}_2, \dots, \vec{a} + \vec{x}_{\ell-1}]_\alpha,$$

W je tedy afinním obalem ℓ vektorů. □

Věta 52 (Varieta nekonečné dimenze není afinní obal). *Nechť W je lineární varieta ve V a $\dim W = +\infty$. Pak W není rovna žádnému afinnímu obalu.*

Důkaz. Podle Důsledku 6 je každý afinní obal varietou konečné dimenze. Odtud tvrzení plyne. □

6.6 Lineární variety jako průniky nadrovin

Věta 53. *Nechť $\varphi \in V^\#$, $\varphi \neq \Theta$. Nechť $\alpha \in T$. Pak množina*

$$\{\vec{x} \in V \mid \varphi(\vec{x}) = \alpha\}$$

je nadrovina ve V .

Důkaz. Protože $\varphi \neq \Theta$, platí $\varphi(V) = T$. Existuje tedy $\vec{a} \in V$ tak, že $\varphi(\vec{a}) = \alpha$. Potom platí $\varphi^{-1}(\alpha) = \vec{a} + \ker \varphi$, což je zjevně varieta kodimenze 1, neboť podle Věty 34 je $\text{codim ker } \varphi = h(\varphi) = 1$. \square

Věta 54 (Varieta konečné kodimenze je průnik nadrovin). *Nechť $W = \vec{a} + P$, kde $P \subset\subset V$, je lineární varieta ve V , $\text{codim } W = \ell \in \mathbb{N}$. Potom existuje LN soubor lineárních funkcionalů $(\varphi_1, \dots, \varphi_\ell)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in T$ tak, že*

$$W = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}.$$

Slovy: „Každá lineární varieta o kodimenzi ℓ je průnikem ℓ nadrovin.“

Důkaz. Máme $P \subset\subset V$ a $\text{codim } P = \ell$. Existuje $Q \subset\subset V$ doplněk P do V , kde $\dim Q = \ell$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ bázi Q . Definujeme-li pro každé $i \in \widehat{\ell}$

$$\varphi_i = \vec{x}_i^\# A_Q \quad \text{a} \quad \alpha_i = \varphi_i(\vec{a}),$$

pak

$$\vec{a} + P = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}.$$

Je třeba ověřit dvě inkluze:

- $\vec{a} + P \subset \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$: Nechť $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}$, kde $\vec{p} \in P$, pak pro každé $i \in \widehat{\ell}$ platí $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{a}) + \varphi_i(\vec{p}) = \alpha_i + 0 = \alpha_i$. Tedy $\vec{x} \in \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$.
- $\vec{a} + P \supset \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$: Nechť pro každé $i \in \widehat{\ell}$ platí $\varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i$, pak $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{a})$, tedy $\varphi_i(\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Označme $\vec{z} = \vec{x} - \vec{a}$. Jelikož $\vec{z} \in V$, existuje právě jedno $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ tak, že $\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$. Označme $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ souřadnice \vec{q} v bázi \mathcal{X} . Dostáváme $\varphi_i(\vec{z}) = \varphi_i(\vec{p}) + \varphi_i(\vec{q}) = 0 + \beta_i$ pro každé $i \in \widehat{\ell}$. Proto $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$, tedy $\vec{q} = \vec{0}$ a $\vec{z} = \vec{p} \in P$, neboli $\vec{x} \in \vec{a} + P$. \square

Definice 37. *Rovnice*

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{x}) &= \alpha_1 \\ \dots &\dots \dots \\ \varphi_\ell(\vec{x}) &= \alpha_\ell \end{aligned}$$

z Věty 54 nazýváme vektorové rovnice variety W .

Je-li $\dim V = n \in \mathbb{N}$ a je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V , pak pro libovolný vektor $\vec{x} \in W$ splňují

souřadnice $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ neparаметrické rovnice variety W v bázi \mathcal{X}

$$\begin{aligned} \beta_1 \varphi_1(\vec{x}_1) + \beta_2 \varphi_1(\vec{x}_2) + \dots + \beta_n \varphi_1(\vec{x}_n) &= \alpha_1 \\ \beta_1 \varphi_2(\vec{x}_1) + \beta_2 \varphi_2(\vec{x}_2) + \dots + \beta_n \varphi_2(\vec{x}_n) &= \alpha_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \beta_1 \varphi_\ell(\vec{x}_1) + \beta_2 \varphi_\ell(\vec{x}_2) + \dots + \beta_n \varphi_\ell(\vec{x}_n) &= \alpha_\ell \end{aligned}$$

Příklad 48. Nadroviny, jejichž průnik tvoří danou varietu, nejsou určeny jednoznačně. Zapišme přímku W s vektorem posunutí $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a zaměřením $\mathcal{Z}(W) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$ dvěma různými způsoby jako průnik nadrovin. Užijeme konstrukci z důkazu Věty 54.

1. Volme $Q = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$ s bází $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Položme $\varphi_1 = \vec{e}_2^\# A_Q$ a $\varphi_2 = \vec{e}_3^\# A_Q$, pak platí

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = y = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = \varphi_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = z = \varphi_2(\vec{a}) = \varphi_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

tedy neparametrické rovnice W ve standardní bázi jsou

$$y = 1 \quad a \quad z = 1.$$

2. Necháme doplněk Q stejný, volíme pouze jinou bázi Q $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Položme $\varphi_1 = \vec{x}_1^\# A_Q$ a $\varphi_2 = \vec{x}_2^\# A_Q$, pak platí

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{y+z}{2} = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = \varphi_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{y-z}{2} = \varphi_2(\vec{a}) = \varphi_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

tedy neparametrické rovnice W ve standardní bázi jsou tentokrát

$$\frac{y+z}{2} = 1 \quad a \quad \frac{y-z}{2} = 0.$$

7 Konvexní množiny ***

V celé této kapitole bude V značit vektorový prostor nad tělesem $T \subset \mathbb{R}$. K definici konvexní množiny potřebujeme pojem úsečka.

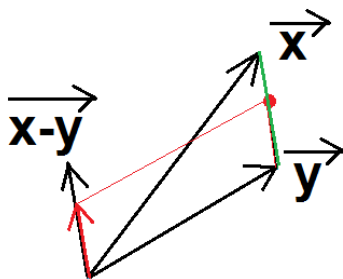
Definice 38. Necht' $\vec{x}, \vec{y} \in V$. **Úsečkou** mezi body \vec{x} a \vec{y} nazveme množinu

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha, \beta \in T, \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Poznámka 68. Uveďme ekvivalentní zápisy úsečky

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha, \beta \in T, \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0\} = \{\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \mid \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \cap T\} = \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \cap T\}.$$

Z posledního zápisu je vidět, že úsečku mezi body \vec{x}, \vec{y} získáme přičítáním α -násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru \vec{y} pro $0 \leq \alpha \leq 1$. Tedy v \mathbb{R}^2 odpovídá úsečka tomu, co si pod tímto pojmem každý představí, viz obrázek 6.



Obrázek 6: Zeleně vyznačena úsečka mezi body \vec{x} a \vec{y} v \mathbb{R}^2 .

Poznámka 69. Je možné uvažovat pouze prostory nad $T \subset \mathbb{R}$, protože po číslech z T chceme, aby šla porovnat s nulou ($\alpha \geq 0$), což pro komplexní nerealná čísla nelze.

Definice 39. Necht' $K \subset V$. K nazveme **konvexní množinou**, pokud

- $K \neq \emptyset$,
- K obsahuje s každými dvěma body i úsečku mezi nimi.

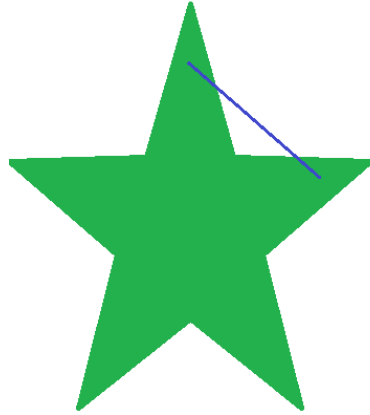
Příklad 49. Každá lineární varieta je konvexní množinou, protože s každými dvěma body obsahuje úsečku mezi nimi. Úsečka je totiž podmnožinou spojnice.

Příklad 50. Konvexní množiny v \mathbb{R}^2 jsou kromě variet (bodů, přímek, celého \mathbb{R}^2) také kruhy, čtverce, obdélníky atd. Konvexní množiny v \mathbb{R}^3 jsou kromě variet (bodů, přímek, rovin a celého \mathbb{R}^3) také koule, krychle, kvádry atd.

S pojmem úsečka úzce souvisí pojem konvexní kombinace.

Definice 40. Necht' $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V . Pak **konvexní kombinací** souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$ a $\alpha_k \geq 0$ pro každé $k \in \hat{\ell}$. Množinu všech konvexních kombinací souboru nazýváme **konvexní obal** souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_{\kappa}$. Platí tedy

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_{\kappa} = \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \mid \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1, \alpha_k \in T \text{ a } \alpha_k \geq 0 \text{ pro každé } k \in \hat{\ell} \right\}.$$



Obrázek 7: Hvězda není konvexní množinou v \mathbb{R}^2 . Modře vyznačena úsečka mezi body hvězdy, která není ve hvězdě obsažena.

Příklad 51. Přímo z definice plyne, že konvexní obal dvou vektorů je roven úsečce mezi nimi.

Souvislost konvexních obalů a konvexních množin je následující.

Věta 55 (Konvexní obal je konvexní množina). *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V . Pak $K = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina a K obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Analogický jako důkaz Věty 40. □

Věta 56 (Konvexní množina obsahuje konvexní kombinace). *Nechť K je konvexní množina. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \in K$. Pak*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa \subset K.$$

Slovy: “Konvexní množina obsahuje s každou ℓ -ticí svých bodů i jejich libovolnou konvexní kombinaci.”

Důkaz. Analogický jako důkaz Věty 41. □

Věta 57 (Minimalita konvexního obalu). *Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \in V$. Pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je nejmenší konvexní množina obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

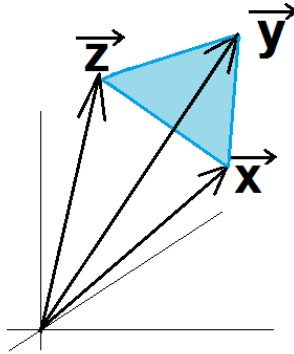
Důkaz. Z Věty 56 víme, že každá konvexní množina obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. Jelikož zároveň z Věty 55 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina, máme dokázáno, že je to nejmenší konvexní množina obsahující dané vektory. □

Příklad 52. *Podle Věty 57 je řešením úlohy najít minimální konvexní množinu K , která obsahuje vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, konvexní obal $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.*

Příklad 53. *Rozmyslete si, jak vypadají konvexní obaly jednoho, dvou, tří, čtyř, pěti vektorů v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 . Např. $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$, kde $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je AN soubor, tvoří trojúhelník s vrcholy \vec{x}, \vec{y} a \vec{z} .*

Vysvětlení: Jelikož jde o konvexní množinu, musí K obsahovat úsečky mezi \vec{x} a \vec{y} , \vec{x} a \vec{z} , \vec{y} a \vec{z} . Dále musí K také obsahovat úsečky mezi body ze tří výše uvedených úseček. Tedy K obsahuje trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, viz obrázek 8. Jelikož trojúhelník už je konvexní množina, našli jsme nejmenší konvexní množinu obsahující $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tedy jsme našli $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi konvexními množinami a konvexními obaly napadnout, zní: “Je každá konvexní množina konvexním obalem nějakého souboru vektorů?” Odpověď – na rozdíl od lineárních variet – zní: NE (nezávisle na dimenzi V). Např. v \mathbb{R}^2 , jak si snadno rozmyslíte, jsou konvexní obaly mnohoúhelníky. Proto kruh jako konvexní obal konečně mnoha vektorů nezískáme.



Obrázek 8: Konvexní obal 3 AN vektorů v \mathbb{R}^2 je trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

Definice 41. Necht' $(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je AN soubor z V , $k \in \{0\} \cap \mathbb{N}$. Pak $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\kappa$ nazýváme **k -simplex s vrcholy $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$** . Speciálně pro $k = 0, 1, 2, 3$ nazýváme

1. $[\vec{x}_0]_\kappa$ **bod**,
2. $[\vec{x}_0, \vec{x}_1]_\kappa$ **úsečka**,
3. $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2]_\kappa$ **trojúhelník**,
4. $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\kappa$ **čtyřstěn**.

Poznámka 70. Rozmyslete si v \mathbb{R}^3 , že k -simplexy pro $k = 0, 1, 2, 3$ odpovídají naší geometrické představě.

Definice 42. Necht' $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ je soubor z V , $\ell \geq 2$. Řekneme, že je **konvexně závislý (KZ)**, pokud existuje index $i_0 \in \ell$ tak, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. V opačném případě nazveme soubor **konvexně nezávislý (KN)**. 1-členný soubor je KN.

Příklad 54. Zatímco maximální AN soubor v \mathbb{R}^2 má 3 členy, KN soubor může mít libovolný konečný počet členů. Např. vrcholy libovolného pravidelného mnohoúhelníku se středem v $\vec{0}$ tvoří KN soubor.

8 Pro zajímavost: Historie vektorového prostoru

Lineární algebra se na vysokých školách učí „proti toku času“. Celou historií lineární algebry se táhly soustavy lineárních algebraických rovnic (k jejich kompletnímu řešení se ale dospělo až roku 1905), determinanty se objevily sto let před maticemi (v polovině 18. století našly determinanty svou oblibu díky Cramerovu pravidlu, zatímco matice byly poprvé pořádně zpracované až v díle Caleyho roku 1858). Vrcholem veškeré abstrakce je pak pojem vektorového prostoru, jehož náznak se objevuje v díle Grassmanna v roce 1844 a poté Peana roku 1888. Pojd'me se na historii vektorového prostoru podívat blíže a seznámit se právě s Grassmannem a Peanem, kteří jsou považováni za otce lineární algebry.

Pojem vektoru pochází z fyziky, je to veličina mající směr a velikost (síla, rychlost). Matematika zavádí vektory v souvislosti s komplexními čísly - Gauss roku 1831 začíná pracovat s komplexními čísly jako s vektory v komplexní rovině. Ještě předtím Bolzano definuje operace s body, přímkami, rovinami. Roku 1832 Bellavitis představuje ekvipolentní počet s úsečkami. Termín vektor i skalár najdeme roku 1843 poprvé u Hamiltona v práci o kvaternionech, vektory ve vícedimenzionálních prostorech se objevují u Caleyho, Hamiltona a Grassmanna. Ve všech těchto pracích jde o konkrétní příklady vektorových prostorů, kde se s vektory počítá podobně jako s čísly (sčítají se, násobí číslem), ale neexistuje žádná obecná definice vektorového prostoru, která by všechny tyto konkrétní příklady zahrnovala.

Podobně se také pojmy lineární (ne)závislost, dimenze a báze objevují v různých kontextech: v algebraické teorii čísel (Dedekind definuje těleso stejně jako my), v lineárních diferenciálních rovnicích (Děmidov), v řešení homogenních soustav lineárních algebraických rovnic (Euler si všímá, že lineární kombinace řešení je opět řešením, kompletní popis řešení poskytuje až Frobenius v roce 1905), v euklidovské geometrii (kartézské souřadnice zavádí Descartes v 17. století, Euler zkoumá prostor \mathbb{R}^3 , Monge pak na počátku 19. století prostor \mathbb{R}^n), v prostoru matic (operace s maticemi popisuje Caley v roce 1858).

V 19. století se rodí axiomatický přístup k matematice - snaha o práci s objekty jako s čísly: konečné grupy a tělesa definuje Weber v roce 1893, kvaterniony zavádí Hamilton v roce 1843, Caley a Graves studují oktoniony, Peirce definuje pojem algebra v roce 1870, Peano zavádí axiomaticky přirozená čísla roku 1889.

První, kdo přichází s ideou vektorového prostoru a studiem jeho vlastností je Hermann Günter Grassmann, který za svého života dosáhl uznání na poli lingvistiky, nikoliv však matematiky. Jeho případ nám ukáže, jak je důležité naučit se dobře jazyk matematiky a umět jeho prostřednictvím jasně formulovat myšlenky.

Hermann Günter Grassmann (1809, Štětín, Prusko – 1877, Štětín, Německo)



Hermannův otec Justus byl profesorem matematiky a fyziky na gymnáziu a syn šel v jeho šlépějích. Zpočátku to však ovšem na kariéru profesora nevypadalo, neboť Hermann byl jen průměrným studentem. V posledním ročníku se ale vzchopil a odmaturoval na pozici 2. nejlepšího studenta gymnázia. V roce 1827 nastoupil na univerzitu v Berlíně, kde studoval teologii, literaturu, filozofii a klasické jazyky, ale žádnou matematiku ani fyziku! Stal se profesorem nižšího stupně gymnázia. V roce 1840 složil zkoušku, která mu umožnila vyučovat matematiku, fyziku, chemii a mineralogii na vyšším stupni gymnázia. Úroveň gymnázií v 19. století byla velmi vysoká a taková zkouška vyžadovala nejen výborné znalosti učiva, ale dokonce vypracování původní vědecké práce. Grassmannova práce nesla název *Theorie der Ebbe und Flut* (teorie odlivu a přílivu) a šlo o aplikaci vektorových metod, které rozvíjel už od roku 1832.

Zároveň se Grassmann věnuje jazykům. V roce 1842 vydává učebnice mluvené němčiny a latiny.

Roku 1844 přichází pro dnešní lineární algebru zlomové dílo *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (teorie lineárních extenzí, nové odvětví matematiky). Objevuje se tu idea algebry, kde jsou definovány operace se symboly reprezentujícími geometrické objekty (body, úsečky, rovnoběžníky, rovnoběžnostěny). V *Ausdehnungslehre* Grassmann předběhl dobu, jak uvidíme, jeho myšlenky našly pochopení až ve 20. století. Ovšem jeho dílo nebylo přijato matematiky ještě z dalších dvou důvodů. Grassmann matematiku nikdy nestudoval, a tak celé dílo bylo sepsáno filozoficky, obzvláště úvod byl pro matematiky nečitelný. A jako matematik-amatér byl přehlížen matematiky-profesionály. Grassmann se ovšem nevzdal a studiu vektorových prostorů se dále věnoval. Zejména se snažil ukázat možné aplikace, např. v roce 1845 v díle *Theorie der Elektrodynamik*.

Roku 1846 získává za dílo *Die geometrische Analyse geknüpft und die von Leibniz Charakteristika* (ucelená geometrická analýza a von Leibnizova charakteristika) cenu od Císařské Jablonovské společnosti. Grassmann doufá, že cena mu pomůže získat post na univerzitě, touží se totiž věnovat naplno vědě. Jeho žádost je ovšem zamítnuta na základě Kummerových slov: *“doporučení hodný materiál, ale vyjádřený v těžko srozumitelné formě”*. Grassmann tedy opět narazil na problém filozofického nejasného vyjadřování myšlenek.

Uveďme i pár detailů z jeho osobního života. Roku 1849 si bere Therese Knappe, s níž má 11 dětí, ovšem jen 7 z nich dosáhlo dospělého věku. Jeden ze synů se stal matematikem, název jeho dizertace zněl *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und Krümmen Flächen* (použití *Ausdehnungslehre* ve všeobecné teorii prostorových křivek a zakřivených ploch), tedy jablko skutečně nepadlo daleko od stromu.

Nedostatek uznání v matematice přiměl Grassmanna, aby se obrátil ke své druhé zálibě - lingvistice. Studium sanskrtu a góštiny mu přineslo úspěch, porovnáním fonetiky zpochybnil pozici sanskrtu jakožto nejstaršího indoevropského jazyka.

Ausdehnungslehre byla ale jeho nejcennějším dílem a rozhodl se, že ji ještě jednou přepíše, aby matematický svět konečně docenil její význam. V roce 1862 publikuje *Die Ausdehnungslehre: Vollständig und in strenger Form bearbeitet*, ale dílo má ještě menší úspěch než *Ausdehnungslehre* z roku 1844. Dá se tedy říci, že během života se Grassmann dočkal většího uznání v oblasti lingvistiky než v matematice.

Podívejme se nyní blíže na *Ausdehnungslehre*. Název teorie extenzí pochází z faktu, že Grassmann definuje i součin a například součinem bodů je úsečka, součinem úseček rovnoběžníků, součinem rovnoběžníků rovnoběžnostěn, tedy vždy objekt v prostoru vyšší dimenze. Nás ale zajímá souvislost *Ausdehnungslehre* s lineární algebrou. Grassmann začíná se souborem “jednotek” e_1, e_2, e_3, \dots (což jsou v dnešním smyslu lineárně nezávislé vektory) a uvažuje jejich formální lineární kombinace $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \dots$, kde $a_i \in \mathbb{R}$. Takové kombinace tvoří množinu, kterou Grassmann dále zkoumá. Definuje nulovost a rovnost lineárních kombinací, jejich součet a násobení skalárem. Zavádí axiomy lineárního prostoru pro tyto operace. Představuje pojmy lineární nezávislost, lineární obal, dimenze, báze, lineární podprostor a jeho doplněk. Dokazuje nezávislost dimenze na volbě báze, Steinitzovu větu o výměně (Steinitz ji pak znovu dokáže roku 1913, jelikož Grassmannovy výsledky nejsou známé), 1. větu o dimenzi. Dokazuje, že každý lineárně nezávislý soubor lze doplnit na bázi a z každého souboru generátorů lze vybrat bázi. Odvozuje vzorec pro změnu souřadnic při přechodu k jiné bázi. Vidíme tedy, že velká část teorie lineární algebry, kterou jsme v prvním semestru probrali, pochází právě od Grassmanna.

Tvůrcem první axiomatické definice vektorového prostoru je Giuseppe Peano. Narozdíl od Grassmanna byl Peano mezi matematiky obdivován pro svou schopnost precizně formulovat myšlenky. Také dokázal hbitě nacházet protipříklady k chybným tvrzením a nalézat chyby ve standardních výsledcích. Jak uvidíme, byl opakem Grassmanna i v tom, že sklídl úspěch na poli matematiky, nikoliv však ve svých lingvistických a encyklopedických projektech.

Giuseppe Peano (1858, Cuneo, Itálie – 1932, Turín, Itálie)



Roku 1880 promoval na univerzitě v Turíně a získal post asistenta. V roce 1884 podle přednášek svého školitele Genocchiho sepsal *Calcolo Differenziale e Principii di Calcolo Integrale*, podepsal se jen jako spoluautor, ale Genocchi píše v předmluvě: „...to vše je zásluhou tohoto výjimečného mladého muže Dr. Giuseppa Peana.“ Dílo přispělo k jeho jmenování profesorem téhož roku, získal tedy tento titul velmi mladý. Nesmrtelnost Peanovi přinesly zejména tři výsledky:

1. 1889 - Peanovy axiomy přirozených čísel v díle *Arithmetices principia, nova methodo exposita*,
2. 1890 - Peanova křivka, což je spojitá surjektivní křivka z $[0, 1]$, která vyplní jednotkový čtverec,
3. položení základů matematické logiky a teorie množin.

Roku 1887 publikuje *Applicazioni Geometriche del Calcolo Infinitesimale*, kde prokazuje dobrou znalost a schopnost dávat do zajímavých souvislostí výsledky Möbia, Hamiltona, Bellavitiše a GRASSMANNNA. V roce 1888 přichází Peanovo stěžejní dílo pro lineární algebru *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, které končí **první axiomatickou definicí vektorového prostoru**. Moderním jazykem zde přehledně a srozumitelně zpracovává hlavní Grassmannovy myšlenky. Uvádí příklady vektorových prostorů: \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , prostor lineárních zobrazení, prostor polynomů.

Významným počinem je založení časopisu věnovaného logice a teorii množin *Rivista di matematica* v roce 1891. Kvalitu časopisu zaručoval fakt, že Peano jako recenzent snadno nacházel ve výsledcích chyby a k nim protipříklady a garantoval tak publikaci pouze korektních výsledků.

Koncem 19. století nastává zlom v Peanově kariéře: věnuje čas ambiciózním projektům s malým ohlasem. V letech 1892 až 1908 pracuje na projektu *Formulario mathematico*, který má za cíl shrnout veškeré matematické výsledky do jediné knihy, navíc pomocí nové logické symboliky. Peano používá projekt i k výuce, jeden ze studentů vzpomíná: „Nutí nás trávit spoustu času učením se symboliky, kterou už nikdy jindy v životě nevyužijeme.“ Naopak ochotu naučit se Peanovo značení projevil roku 1900 Bertrand Russel: „Znal jsem jeho práce, ale jeho značení jsem neovládal. Fakt, že se na Kongresu vyjadřoval přesněji než všichni ostatní a že vždy nacházel ty nejlepší argumenty, mě přiměl k rozhodnutí, že si jeho značení osvojím.“ V roce 1903 odstartoval další ambiciózní projekt *Latino sine flexione*, což měl být univerzální mezinárodní jazyk bez gramatiky, kombinující

slova z latiny, angličtiny, němčiny a francouzštiny. A završením všeho bylo sepsání finální verze *Formulario mathematico* v tomto univerzálním jazyce *Latino sine flexione!*

Pro zajímavost uvedme Peanovu axiomatickou definici vektorového prostoru (nazývá jej lineární systém), abychom viděli, jak moc se podobá definici dnešní.

Definice 43. *Nechť V je množina, na které jsou definovány:*

1. *Rovnost $\vec{a} = \vec{b}$ jako symetrická a tranzitivní relace.*
2. *Sčítání jako zobrazení: $V \times V \rightarrow V$ splňující*
 - 1) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$, 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, 3) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3. *Pro $\vec{a} \in V$ a $m \in \mathbb{N}$ znamená $m\vec{a}$ součet m prvků rovných \vec{a} . Snadno nahlédneme, že platí*
 - 4) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{b}$, 5) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$, 6) $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, 7) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$, 8) $1\vec{a} = \vec{a}$.
4. *Násobení reálným číslem jako zobrazení $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, které zobecňuje vlastnosti pro násobení přirozeným číslem.*
5. *Existuje prvek $\vec{0}$, který splňuje pro každé $\vec{a} \in V$ $0\vec{a} = \vec{0}$. Pokud $\vec{a} - \vec{b}$ chápeme jako $\vec{a} + (-1)\vec{b}$, pak je snadné nahlédnout, že*
 - 9) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$, 10) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Pak V nazveme lineární systém.

Axiomy týkající se rovnosti v dnešní definici neuvádíme, automaticky předpokládáme, že množina, kterou uvažujeme, je relací rovnosti vybavena. Bod 3. týkající se násobení přirozeným číslem je nadbytečný. Peano jej uvádí, aby čtenář lépe porozuměl, odkud se berou axiomy vyžadované po násobení reálným číslem.

Na přijetí konceptu vektorového prostoru si ale matematika ještě počkala až do 20. století. V roce 1920 Banach ve své dizertační práci zavádí úplné normované vektorové prostory, kterým se dnes říká Banachovy, a při té příležitosti definuje vektorový prostor přesně tak jako my dnes. První učebnice, v níž se objevuje pojem vektorový prostor, je *Modern Algebra* z roku 1930 od van der Waerdena.

9 Dodatek: Polynomy

Definice 44. *Komplexní funkci komplexní proměnné $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme **polynomem**, pokud existuje $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ a existují čísla $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (nazýváme je **koefficienty polynomu**) taková, že*

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Názvosloví:

- **stupeň polynomu** $\text{st } p = \max\{i \in \{0, 1, \dots, n\} \mid \alpha_i \neq 0\}$ (vyjadřuje, jakou maximální mocninu t polynom obsahuje)
- **nulový polynom** $\mathcal{O}(t) = 0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, stupeň není definován (nemá stupeň jako jediný z polynomů)
POZOR! polynom multého stupně je nenulová konstanta
- dle stupně n rozlišujeme:
 - lineární polynom ($n = 1$), např. $p(t) = t + 3$,
 - kvadratický polynom ($n = 2$), např. $p(t) = -t^2 + \frac{1}{2}t + \sqrt{3}$,
 - kubický polynom ($n = 3$), např. $p(t) = -it^3$,
 - bikvadratický polynom ($n = 4$), např. $p(t) = -t^4 - 10^4 t^3$,
- **kořen (nulový bod) polynomu** p je každé číslo $t_0 \in \mathbb{C}$ splňující $p(t_0) = 0$
- **reálným polynomem** nazveme polynom s reálnými koeficienty

Věta 58 (Základní věta algebry). *Každý polynom stupně alespoň prvního má v \mathbb{C} alespoň jeden kořen.*

Ponecháme bez důkazu.

Věta 59 (Bézoutova věta). *Nechť p je polynom n -tého stupně pro $n \in \mathbb{N}$, nechť $t_0 \in \mathbb{C}$. Potom existuje polynom q stupně $n - 1$ takový, že platí*

$$p(t) = p(t_0) + (t - t_0)q(t) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Důkaz. Označme $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$, $\alpha_n \neq 0$. Pak

$$\begin{aligned} p(t) - p(t_0) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j - \sum_{j=0}^n \alpha_j t_0^j &= \sum_{j=0}^n \alpha_j (t^j - t_0^j) &= \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (t^j - t_0^j) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (t - t_0) \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i} &= \\ &= (t - t_0) \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i} &= (t - t_0)q(t). \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že $q(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i}$ je polynom a má stupeň $n - 1$, protože pro $j = n$ a $i = n - 1$ dostaneme maximální mocninu t^{n-1} , kterou $q(t)$ obsahuje, a koeficient u t^{n-1} je $\alpha_n \neq 0$.

V důkazu jsme využili vzorec $a^j - b^j = (a - b) \sum_{i=0}^{j-1} a^i b^{j-1-i}$, který platí pro každé $a, b \in \mathbb{C}$ a $j \in \mathbb{N}$. (Dokažte jej sami matematickou indukcí.) \square

Důsledek 7. *Každý polynom n -tého stupně, kde $n \in \mathbb{N}_0$, má nejvýše n různých kořenů.*

Důkaz. Matematickou indukcí podle stupně polynomu n .

- Pro $n = 0$ je tvrzení jasné.

- Předpokládejme pro nějaké $n \geq 0$, že každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů. Necht' p je polynom stupně $n + 1$ a necht' t_0 je jeho kořen (podle Základní věty algebry víme, že takové $t_0 \in \mathbb{C}$ existuje). Podle Bézoutovy věty existuje polynom q stupně n takový, že

$$p(t) = (t - t_0)q(t).$$

Jelikož má q podle indukčního předpokladu nejvýše n kořenů, má p nejvýše $n + 1$ kořenů. □

Důsledek 8. *Jedině nulový polynom má nekonečně mnoho kořenů.*

Poznámka 71. *Pokud tedy u nějakého polynomu tvaru $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$ zjistíme, že má více než n kořenů, pak už jde nutně o nulový polynom, tedy $\alpha_j = 0$ pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.*

Důsledek 9. *Koeficienty polynomu a tedy i jeho stupeň jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje polynom p , pro který platí

$$p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j = \sum_{j=0}^n \beta_j t^j \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C} \text{ (nepředpokládáme, že } \alpha_n \neq 0 \text{ ani } \beta_n \neq 0)$$

a existuje index $j_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$ takový, že $\alpha_{j_0} \neq \beta_{j_0}$. Pak ale $\sum_{j=0}^n (\alpha_j - \beta_j) t^j = 0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, a tedy jde o nulový polynom, což je ale spor s tím, že koeficient $\alpha_{j_0} - \beta_{j_0} \neq 0$. □

Poznámka 72. *Až nyní jsme se dozvěděli, že definice stupně polynomu je korektní, tedy že každý polynom má stupeň jednoznačně určený.*

Poznámka 73. *V příkladech často využijeme, že z Důsledku 9 plyne, že dva polynomy se rovnají, právě když se rovnají jejich koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné.*

Věta 60 (Rozklad polynomů na kořenové činitele). *Necht' $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$ je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$. Necht' t_1, t_2, \dots, t_k jsou jeho navzájem různé kořeny. Pak existují jednoznačně určená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{j=1}^k n_j = n$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí*

$$p(t) = \alpha_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_k)^{n_k}.$$

Říkáme, že n_j je násobnost kořene t_j a $t - t_j$ je kořenový činitel příslušející t_j .

Důkaz. Matematickou indukcí podle stupně polynomu n .

- Pro $n = 1$ je pro $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ jednoznačným rozkladem na kořenové činitele $p(t) = \alpha_1 (t + \frac{\alpha_0}{\alpha_1})$.
- Předpokládejme pro nějaké $n \geq 1$, že každý polynom stupně n má jednoznačný rozklad na kořenové činitele. Necht' p je polynom stupně $n + 1$ a necht' t_0 je jeho kořen (podle Základní věty algebry víme, že takové $t_0 \in \mathbb{C}$ existuje). Podle Bézoutovy věty existuje polynom q stupně n takový, že

$$p(t) = (t - t_0)q(t).$$

Podle indukčního předpokladu má $q(t) = \sum_{j=0}^n \beta_j t^j$ jednoznačný rozklad na kořenové činitele, tj. existují jednoznačně určená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{j=1}^k n_j = n$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$q(t) = \beta_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_k)^{n_k}.$$

Odtud máme jednoznačný rozklad p na kořenové činitele

$$p(t) = \beta_n (t - t_0) (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_k)^{n_k},$$

který lze ještě upravit, pokud $t_0 = t_j$ pro nějaké $j \in \hat{k}$, jako

$$p(t) = \beta_n(t - t_1)^{n_1}(t - t_2)^{n_2} \cdots (t - t_j)^{n_j+1} \cdots (t - t_k)^{n_k},$$

nebo pro $t_0 \neq t_j$ pro každé $j \in \hat{k}$, jako

$$p(t) = \beta_n(t - t_1)^{n_1}(t - t_2)^{n_2} \cdots (t - t_k)^{n_k}(t - t_{k+1})^{n_{k+1}},$$

kde $t_{k+1} = t_0$ a $n_{k+1} = 1$. Snadno zkontrolujeme, že součet násobností je $n + 1$ a že β_n odpovídá koeficientu $p(t)$ u nejvyšší mocniny t^{n+1} . □

Poznámka 74. *Násobnost kořene polynomu lze ekvivalentně definovat následujícím způsobem: t_0 je k -násobný kořen polynomu p , pokud existuje polynom q takový, že $p(t) = (t - t_0)^k q(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$ a $q(t_0) \neq 0$.*

Věta 61 (O kořenech reálných polynomů). *Nechť p je reálný polynom a nechť t_0 je jeho k -násobný kořen. Pak \bar{t}_0 (číslo komplexně sdružené k t_0) je také jeho k -násobný kořen.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že \bar{t}_0 je také kořen. Nechť $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$, kde $\alpha_j \in \mathbb{R}$ a $\alpha_n \neq 0$.

$$p(\bar{t}_0) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \bar{t}_0^j = \overline{\sum_{j=0}^n \alpha_j t_0^j} = \overline{p(t_0)} = 0.$$

Nyní dokážeme, že \bar{t}_0 je k -násobný kořen. Z Bézoutovy věty víme, že $p(t) = (t - t_0)^k q(t)$ a $q(t_0) \neq 0$. Pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí díky reálnosti p a díky vlastnostem komplexních čísel

$$p(t) = \overline{p(\bar{t})} = \overline{(\bar{t} - t_0)^k q(\bar{t})} = (t - \bar{t}_0)^k \overline{q(\bar{t})}.$$

Jelikož $q(\bar{\bar{t}_0}) = \overline{q(t_0)} \neq 0$, je dokázáno, že \bar{t}_0 je k -násobný kořen p . □

Důsledek 10. *Má-li reálný polynom lichý stupeň, pak má reálný kořen.*

Poznámka 75. *Rozklad reálného polynomu na kořenové činitele v reálném oboru: Je-li $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ k -násobný kořen reálného polynomu p , pak \bar{t}_0 je také k -násobným kořenem p a v rozkladu na kořenové činitele můžeme sloučit*

$$(t - t_0)^k (t - \bar{t}_0)^k = ((t - t_0)(t - \bar{t}_0))^k = (t^2 - (t_0 + \bar{t}_0)t + t_0 \bar{t}_0)^k,$$

kde, jak víme, $t_0 + \bar{t}_0$ i $t_0 \bar{t}_0 = |t_0|^2$ jsou reálná čísla.

Příklad 55. *Reálný polynom $p(t) = t^4 - 1$ má rozklad v komplexním oboru roven*

$$t^4 - 1 = (t - 1)(t + 1)(t - i)(t + i)$$

a v reálném oboru roven

$$t^4 - 1 = (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1).$$

Reference

- [1] Emil Humhal, *Algebra 1*, <http://tjn.fjfi.cvut.cz/~humhal/>
- [2] Jiří Pytlíček, *Lineární algebra a geometrie*, vydavatelství ČVUT, Praha, 2005
- [3] Jean-Luc Dorier, *Contribution a l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, thèse, 1990
- [4] Eva Ulrychová, *Zrod vektorového počtu a vektorových prostorů*, sborník 29. mezinárodní konference HISTORIE MATEMATIKY, Velké Meziříčí, 22.8.-26.8.2008, matfyzpress, editoři J. a M. Bečvářovi, 179-184
- [5] BibM@th <http://www.bibmath.net/>
- [6] Wikipedia, the Free Encyclopedia
- [7] The MacTutor History of Mathematics archive <http://www.gap-system.org/history>