Cvičení LAP

Vektorový prostor, LN a LZ, báze, dimenze

1. Je soubor $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4)$ z $\mathbb{C}^{2,2}$ LN nebo LZ?

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Je soubor (x_1, x_2, x_3, x_4) z $\mathcal{P}$ LN nebo LZ?

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3t - 1 \\ x_2(t) &= 5t \\ x_3(t) &= t + 8 \\ x_4(t) &= t^2 - t + 1. \end{aligned}$$

3. Je soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ z $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ LN nebo LZ?

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Nechť $x_1, x_2, x_3, x \in \mathcal{P}_3$. Platí $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$?

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + t - 2t^2 \\ x_2(t) &= 7 - 8t + 7t^2 \\ x_3(t) &= 3 - 2t + t^2 \\ x(t) &= 2 + 4t - t^2. \end{aligned}$$

5. Najděte $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3)$ v $\mathbb{C}^{2,2}$ byl LZ.

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ i & \alpha+i \end{pmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & \alpha+2 \\ i & \alpha+i \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Dokažte přímo z definice, že $(\vec{x}, \vec{y})$ je LZ $\Leftrightarrow$ $(\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha\vec{y} \vee \vec{y} = \alpha\vec{x})$.

7. Nechť $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ je soubor z $\mathcal{P}$. Najděte bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$.

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3 - 4t + t^2 + 2t^3 \\ x_2(t) &= 5 + 26t - 9t^2 - 12t^3 \\ x_3(t) &= 2 - 5t + 8t^2 - 3t^3 \\ x_4(t) &= 2 + 3t - 4t^2 + t^3 \\ x_5(t) &= 1 + 2t + 3t^2 - 4t^3. \end{aligned}$$

8. Nechť (x_1, x_2, x_3) je soubor z $\mathcal{P}_5$. Najděte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tak, aby $\dim[x_1, x_2, x_3]_\lambda < 3$.

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4 \\ x_2(t) &= 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4 \\ x_3(t) &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4. \end{aligned}$$

9. Nechť $V = (0, +\infty)$, $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\vec{x} = x \in (0, +\infty)$ a $\vec{y} = y \in (0, +\infty)$ a pro každé $\alpha \in T$ definujeme:

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y, \ \alpha \odot \vec{x} = x^\alpha.$$

Dokažte, že V je vektorový prostor nad T. Rozhodněte o LZ $(\vec{x},\vec{y})$ pro libovolnou volbu $\vec{x},\vec{y}$.

10. Nechť $\mathcal{Y}=(\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n)$ je báze V nad T. Známe-li $(\vec{x})_\mathcal{X}$ a $(\vec{y}_1)_\mathcal{X},\dots,(\vec{y}_n)_\mathcal{X}$, pak $(\vec{x})_\mathcal{Y}$ najdeme jako řešení soustavy
$$\left((\vec{y}_1)_\mathcal{X}\ \dots\ (\vec{y}_n)_\mathcal{X}\ \middle|\ (\vec{x})_\mathcal{X}\right).$$
Využijte toho v následujícím příkladu.
Nechť $\mathcal{X}=(x_1,x_2,x_3)$ a $\mathcal{Y}=(y_1,y_2,y_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ a $x,y\in\mathcal{P}_3$.
$$\forall t\in\mathbb{C}$$
$$\begin{aligned}x_1(t)&=2+2t-t^2\\ x_2(t)&=2-t+2t^2\\ x_3(t)&=-1+2t+2t^2.\end{aligned}$$
Dále $(y_1)_\mathcal{X}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $(y_2)_\mathcal{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $(y_3)_\mathcal{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a $(x)_\mathcal{Y}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ a $(y)_\mathcal{X}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Najděte $(x-2y)_\mathcal{Y}$, $(x-2y)_\mathcal{X}$ a $(x-2y)_\mathcal{E}$.

Podprostor

1. Nechť $M=\{x\in\mathcal{P}_4 \mid x(1)=0\}$.
   (a) Platí $M\subset\subset\mathcal{P}_4$?
   (b) Pokud ano, najděte $\dim M$ a bázi M.
2. Nechť $P,Q\subset\subset V$.
   (a) Pro cvičící: Vysvětlete, že $P+Q$ je nejmenší podprostor obsahující $P\cup Q$.
   (b) Nechť $P=[\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n]_\lambda$ a $Q=[\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_m]_\lambda$. Vysvětlete, že $P+Q=[\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_m]_\lambda$.
   (c) V úloze najít bázi a dimenzi $P+Q$ a $P\cap Q$ obvykle najdeme dimenzi a bázi P a Q, z bazických vektorů obou vytvoříme obal $=P+Q$. Odtud určíme dim a bázi $P+Q$. Z první věty o dimenzi máme
$$\dim(P\cap Q)=\dim P+\dim Q-\dim(P+Q).$$
3. Nechť $P=\{x\in\mathcal{P}_4 \mid (\forall t\in\mathbb{R})(x(t)=x(-t))\}$ a $Q=\{x\in\mathcal{P}_4 \mid (\forall t\in(1,2))(x(t)=x(1-t))\}$. Je-li $P\subset\subset\mathcal{P}_4$ a $Q\subset\subset\mathcal{P}_4$, najděte bázi a dimenzi $P+Q$ a $P\cap Q$.
4. Nechť $M=\left\{\mathbb{A}\in T^{n,n}\ \middle|\ \left(\exists\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in T^n\right)\left(\exists\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in T^n\right)(\forall i\in\hat{n})(\forall j\in\hat{n})(\mathbb{A}_{ij}=x_i+y_j)\right\}$.
   Dokažte, že $M\subset\subset T^{n,n}$ a určete dim M.

Lineární variety

Jsou-li lineární variety zadány v prostorech $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, dělejte náčrty situací!

1. Nechť $W\subset\mathbb{R}^2$, kde
$$W=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+[\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}]_\lambda.$$
   Napište směrovou rovnici W, parametrické rovnice W a zapište W ve tvaru afinního obalu.
2. Nechť $W\subset\mathbb{R}^2$, kde
$$W=[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}]_\alpha.$$
   Napište parametrické rovnice W.

3. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W \equiv y = 2.$$
Napište parametrické rovnice W.

4. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2. \end{array}$$
Najděte parametrické rovnice W.

5. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha.$$
Napište parametrické rovnice W.

6. Nechť $W \subset \mathbb{R}^4$, kde
$$W \equiv \; 2x \; - \; 3y \; = \; -4.$$
Najděte parametrické rovnice W.

7. Zjistěte, zda následující body z $\mathbb{R}^4$ leží v jedné přímce nebo v jedné rovině.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Návod: Uvědomte si, že nejmenší lineární varieta, která body obsahuje, je jejich afinní obal.

8. Rozmyslete si, jaké všechny případy mohou nastat pro průnik dvou lineárních variet v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

   Ve všech příkladech zní zadání stejně: Určete vzájemnou polohu a najděte průnik lineárních variet W_1 a W_2.

   (a) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde
   $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t, \\ y & = & -1 & + & 2t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad W_2 \equiv -2x + y = 3.$$

   (b) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde
   $$W_1 \equiv x + y = 1, \qquad W_2 \equiv x - y = 3.$$

   (c) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde
   $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3t, \\ y & = & & & 2t, \\ z & = & & & t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

   (d) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde
   $$W_1 \equiv \begin{array}{lcr} x + y + z & = & 1, \\ x - y & = & 2, \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 3, \\ & & 2y & + & z & = & 1. \end{array}$$

(e) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(f) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & -2, \\ 2x & - & y & & & = & 2. \end{array}$$

(g) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(h) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

(i) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 3t + s, \\ y & = & 1 + t - s, \\ z & = & 1 + t + s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(j) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & 3t & + & s, \\ y & = & & & t & - & s, \\ z & = & & & t & + & s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(k) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv 2x - y = 2.$$

(l) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv 2x + 3y + 4z = 2, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t, & & \\ y & = & 4 & - & 2t & - & 4s, \\ z & = & -3 & + & t & + & 3s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(m) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 5y & + & z & - & 4u & = & 1, \\ x & + & y & + & z & - & 2u & = & 2, \end{array} \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(n) Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = [\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}]_\lambda, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t & - & s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array},$$

$$W_3 \equiv \begin{array}{cccccc} x & - & y & & = & 1 \\ x & & & - \; z & = & 2 \end{array}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_3$.

(o) Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t & - & 2s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array}$,

$$W_3 \equiv \begin{array}{cccccc} x & - & y & & = & 0 \\ x & & & - \; z & = & 0 \end{array}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

(p) Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccccc} x & = & 1 & + & t & + & s & + & r \\ y & = & 0 & - & t & & & & \\ z & = & 0 & + & t & + & s & & \\ u & = & 0 & - & t & + & s & + & r \end{array}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

(q) Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$. Nechť W_1 je nejmenší lineární varieta, která obsahuje vektory $\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\8\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\4\\3\end{pmatrix}$ a nechť $W_2 \equiv \begin{array}{ccccccccc} & - & 2y & + & z & - & u & = & 1 \\ x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & u & = & 1 \end{array}$.

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu a průnik W_1 a W_2.

(r) Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 2 & + & t & + & s \\ y & = & & - & t & & \\ z & = & & & t & & \\ u & = & & & & & s \end{array}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

(s) Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t & - & 2s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array}$.

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.

Lineární funkcionál

1. Je $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$?
$$\varphi(\vec{x}) = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3,$$
kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{smallmatrix}\right)$. Pokud ano, najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$.

2. Je $\varphi \in \mathcal{P}^\#$?
$$\varphi(x) = x(2).$$

3. Je $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$?
$$\varphi(\vec{x}) = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2i\alpha_3,$$
kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{smallmatrix}\right)$. Pokud ano, najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, je-li $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix}3\\ 2\\ -1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\ -1\\ 4\end{smallmatrix}\right))$.

4. Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_4^\#$.
$$\varphi(x) = 2\alpha_0 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + 2\alpha_3 + x(-1),$$
kde $(\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3)$ a $(x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována
$$(\forall t \in \mathbb{C})(x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = 1 - t,\ x_3(t) = t^2 - t^3,\ x_4(t) = t^2 + t^3).$$
Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$ a $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$.

5. Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$. $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#} = \left(\begin{smallmatrix}1\\ -3\\ 4\end{smallmatrix}\right)$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, je-li $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix}1\\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\\ 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\ 2\\ 3\end{smallmatrix}\right))$.

6. Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$. $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \left(\begin{smallmatrix}-1\\ 5\\ 6\end{smallmatrix}\right)$, kde $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix}1\\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\\ 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\ 2\\ 3\end{smallmatrix}\right))$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$.

7. Nechť $\varphi \in (\mathcal{P}_2)^\#$. $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$ jsou báze $\mathcal{P}_2$, kde
$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + t \\ x_2(t) &= 1 - t \\ y_1(t) &= 1 - 2t \\ y_2(t) &= 3 + 2t. \end{aligned}$$
Nechť $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \left(\begin{smallmatrix}1\\ 2\end{smallmatrix}\right)$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{Y}^\#}$.

8. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{C}^3)^\#$.
$$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\\ 3\end{smallmatrix}\right), (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \left(\begin{smallmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{smallmatrix}\right), \varphi_3(\vec{x}) = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3,$$
kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{smallmatrix}\right)$ a $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix}1\\ 2\\ -1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\\ 2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\ 1\\ -2\end{smallmatrix}\right))$. Je soubor $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ LN?

9. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in (\mathcal{P})^\#$. Pro každé $x \in \mathcal{P}$ platí
$$\varphi_1(x) = x(1) - x(0),\ \varphi_2(x) = x(2),\ \varphi_3(x) = 2x(1) - 3x(2),\ \varphi_4(x) = 2x(0) + x(1) + 4x(2).$$
Je soubor $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ LN?

10. Nechť $\varphi \in (\mathcal{P}_3)^\#$. Pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ platí $\varphi(x) = x(i) - x(0)$. Řešte $\varphi(x) = i - 1$.

11. Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^\#$.
$$\varphi_1(\vec{x}) = \alpha_1 - \alpha_2, (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Najděte bázi průniku jader funkcionálů, tj. $\varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}(\{0\})$.

Lineární zobrazení

1. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ je definované $(Ax)(t) = x(t+1)\ \forall t \in \mathbb{C}$.
   (a) Je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$?
   (b) Pokud ano, najděte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$
$$\forall t \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= t - t^2 \\ x_2(t) &= 1 - t + t^2 \\ x_3(t) &= -1 + t. \end{aligned}$$

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^2)$.
$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Ax_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$
$$\forall t \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= 1 - t \\ x_2(t) &= t^2 \\ x_3(t) &= 1 + t. \end{aligned}$$
Řešte rovnici $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $\varphi \in (V_n)^\#$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Jaký je vztah ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{E}}$ a $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$?

4. Definujme operátor derivace $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ pro každé $x(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^j$ jako $(Dx)(t) = \sum_{j=1}^{k} j\alpha_j t^{j-1}$.
   Dokažte, že je epimorfní.

5. Definujme operátor integrace $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ pro každé $x(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^j$ jako $(Sx)(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{t^{j+1}}{j+1}$.
   Dokažte, že je monomorfní.

6. Nechť $P, Q \subset \mathbb{R}^3$. $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha$.
$$Q \equiv \begin{array}{rcl} x - y - z &=& 0 \\ x + 2y + z &=& 0. \end{array}$$
   Sestavte matici projektoru A na P podle Q, tj. ${}^{\mathcal{E}}A_P = ?$

7. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$.
$$(Ax)(t) = t \cdot (Dx)(2t + \alpha)\ \forall t \in \mathbb{C}.$$
   Nechť dále $b \in \mathcal{P}_3$.
$$b(t) = \beta + 2t\ \forall t \in \mathbb{C}.$$
   Najděte množinu všech řešení $Ax = b$ v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

8. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. P je množina všech vektorů, které mají 1. složku o 3 větší než součet 2. a 3. souřadnice v bázi $\mathcal{X}$. Ukažte, že P je lineární varieta a najděte její neparametrické rovnice.

9. Nechť $p \equiv x - 2y = 3\alpha$ a $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Najděte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p protla úsečku $\leftrightarrow \vec{a}\vec{b}$.

10. $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. $W_1 \equiv \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z - u & = & 1 \\ x + 2y - z + u & = & 2. \end{array}$ $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\alpha$. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte vzájemnou polohu a průnik W_1 a W_2.

11. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
$$^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
$W \subset \mathbb{R}^3$
$$W \equiv 4x - z = 3.$$
Najděte neparametrické rovnice $A(W)$.

12. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
$$^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
$W \subset \mathbb{R}^3$.
$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$$
Najděte parametrické a neparametrické rovnice $A^{-1}(W)$.

13. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.
$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -3 + 2t \\ z & = & 5 + 3t, \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x - 5y - 5z & = & 15 \\ 3x + 5y - 5z & = & 35. \end{array}$$
Nechť $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Najděte parametrické rovnice příčky, která prochází bodem $\vec{a}$.

14. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.
$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} 4x + y - z & = & 2 \\ 2x + 2y + z & = & 7, \end{array} \qquad W_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$$
Najděte příčku W_1 a W_2 rovnoběžnou s W_3.