Zkoušková písemka LAP 28.1.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť $W = \{x \in \mathcal{P}_3 \mid \varphi(x) = 1\}$, kde $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$ splňující pro každé $t \in \mathbb{C}$
$$x_1(t) = 1 - t + t^2,\ x_2(t) = 1 + t^2,\ x_3(t) = 1 - t^2.$$
Najděte $D^{-1}(W)$, kde D je operátor derivování.
Připomeňme, že $\mathcal{P}_3$ značí prostor polynomů stupně maximálně 2.

2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte všechny příčky lineárních variet W_1 a W_2 jdoucí bodem $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, které jsou rovnoběžné s $W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^4$, pak
$$W_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x}_1^\#(\vec{x}) = -x \wedge \vec{x}_2^\#(\vec{x}) = -1 - y \right\}.$$
$$W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

3. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. $P = Z(W_2)$ (tedy P je zaměření variety W_2 z předchozího příkladu).
$$Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$
Najděte všechna řešení rovnice $(A_P - B)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde A_P je projektor na P podle Q a B je definované pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ jako $B\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$.