Zkoušková písemka LAP 22.1.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ zadané pomocí matice v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$. Najděte $A^{-1}(M)$, je-li:

$$(a) \quad M = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha, \qquad (b) \quad M = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\kappa.$$

Výsledky zapište opět pomocí afinního, resp. konvexního obalu, je-li to možné.

2. Nechť $P, W \subset \mathcal{P}_3$, $P = [x, y]_\lambda$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x(t) = 1 - t + t^2, \quad y(t) = t^2.$$

$$W = \{x \in \mathcal{P}_3 \mid x(1) = 0 \wedge x(2) = -2\}.$$

Nechť A_P je projektor na P podle $Z(W)$ (zaměření lineární variety W). Najděte všechna řešení $A_P x = 2e_1 - 2e_2 + e_3$, kde (e_1, e_2, e_3) je báze $\mathcal{P}_3$. Připomeňme, že $\mathcal{P}_3$ značí prostor polynomů stupně maximálně 2.

3. Nechť D je operátor derivování a S je operátor integrování. Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_3^\#$ definovaný

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \beta_2 + x(i),$$

kde $(x)_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ a $(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ je standardní báze $\mathcal{P}_3$ a $\mathcal{X} = (e_3, e_1, e_2)$ je báze $\mathcal{P}_3$. Najděte všechna řešení

   (a) $(\varphi D)(x) = 1$,

   (b) $(\varphi S)(x) = 1$.

   Zapište získané lineární variety pomocí neparametrických rovnic v příslušných standardních bázích.