Zkoušková písemka LAP 14.1.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ je soubor lineárních funkcionálů $(\mathcal{P}_3)^\#$. Nechť dále $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$ definována pro každé $t \in \mathbb{C}$
$$x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = 1 - t,\ x_3(t) = t^2.$$
Definujeme
$$(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$\varphi_2(x) = \alpha_0 + \alpha_2 + \beta_1 - i\beta_2 - x(-1),$$
kde pro každé $t \in \mathbb{C}$
$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \quad \text{a} \quad (x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$
Pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ platí
$$\varphi_3(x) = x(i) - x(0).$$
   (a) Zjistěte, zda je soubor $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ LN.
   (b) Řešte rovnici $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = 1$.

2. Nechť $W_1, W_2, W_3, W_4 \subset \mathbb{R}^3$.
$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 1\},$$
kde $\varphi \in \mathbb{R}^{3\#}$ a $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$.
$$W_2 \equiv \begin{array}{rcr} x & = & 1 + r + s \\ y & = & -1 + 2r - s \\ z & = & -s \end{array}.$$
$$W_3 = \left[\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$$
$$W_4 \equiv \begin{array}{lcr} x - 2y & = & \beta \\ x + 2y - 3z & = & -4 \end{array}.$$
Pro která $\beta \in \mathbb{R}$ existuje právě jedna přímka, která prochází $W_3 \cap W_4$ a je rovnoběžná s $W_1 \cap W_2$. Pro taková $\beta \in \mathbb{R}$ nalezněte neparametrické rovnice přímky ve standardní bázi $\mathbb{R}^3$.

3. Nechť $M = \{x \in \mathcal{P}_3 \mid (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle)(x(t) = x(1-t))\}$. Najděte (a) $D^{-1}(M)$ (b) $S^{-1}(M)$, kde $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$ je operátor derivování a $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ je operátor integrování. (Připomeňme, že $\mathcal{P}_3$ je prostor polynomů stupně nejvýše 2 s přidáním nulového polynomu.)