Zkoušková písemka LAP 2.1.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť W_1, W_2 a W jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$.

$$W \equiv \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & - & u & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 1 \\ x & + & y & & & - & u & = & 2 \end{array},$$

   W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující body $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a rovnoběžná s W,

$$W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(\vec{x}) = 2 \wedge \vec{x}_1^{\#}(\vec{x}) = -\vec{e}_2^{\#}(\vec{x})\}, \text{ kde } (\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Najděte $W_1 \cap W_2$.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ a nechť ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X}$ je stejná báze jako v předchozím příkladě a $\mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$.
   Najděte neparametrické rovnice $A^{-1}(W_2)$ ve standardní bázi $\mathbb{R}^4$, kde W_2 je varieta z předchozího příkladu.

3. Nechť $P = [e_1 + e_2, e_1 - e_3, e_2 + e_3]_\lambda$, kde (e_1, e_2, e_3, e_4) je standardní báze $\mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně nejvýše 3 s přidáním nulového polynomu). Nechť dále $y \in \mathcal{P}_4$ splňuje $y(t) = t + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
   (a) Najděte doplněk Q podprostoru P do $\mathcal{P}_4$,
   (b) Nechť A_P je projektor na P podle Q a D je operátor derivování. Najděte jádro složeného zobrazení $A_P D$ a všechna řešení rovnice $(A_P D)x = y$.