1 Vektorový prostor, lineární (ne)závislost

Z teorie je třeba znát pojmy: vektorový prostor, lineární kombinace, lineární (ne)závislost. Je nutné umět rozhodnout, zda má soustava lineárních algebraických rovnic řešení, a pokud má, tak umět aspoň jedno najít. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) všechny složky jsou reálné,

   (b) $x_1 = x_2$,

   (c) $x_1 \neq x_2$,

   (d) $x_1 + 2x_3 = 0$,

   (e) $x_1 + 2x_3 = 1$.

   Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^3$ (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru číslem z tělesa po složkách) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$?

2. Rozhodněte, zda soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ z $\mathbb{R}^3$ je LZ nebo LN.

   (a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

   (b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

   (c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Zjistěte, zda soubor $(\vec{x}-\vec{y}+2\vec{z}, 2\vec{x}+3\vec{z}, -2\vec{y}+\vec{z})$ je LZ nebo LN.

4. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která je soubor $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \right)$ LZ.

5. Zjistěte, který z vektorů $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ leží v lineárním obalu $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

6. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}, \vec{x}-2\vec{y}+\vec{z}, 3\vec{x}+3\vec{z})$ je jiný soubor vektorů. Rozhodněte, který z vektorů $\vec{u}$ nebo $\vec{v}$ leží v lineárním obalu $\mathcal{X}$, je-li $\vec{u} = -2\vec{x}+\vec{y}-2\vec{z}$ a $\vec{v} = \vec{x}+2\vec{y}+3\vec{z}$.

7. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{R}^3$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Nalezněte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

   (a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix}$,

   (b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha+1 \end{pmatrix}$,

(c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2 Báze, dimenze, souřadnice vektoru v bázi

Z teorie je třeba znát pojmy: báze, dimenze, výběr báze ze souboru generátorů, doplnění LN souboru na bázi, souřadnice vektoru v bázi. Dobré je si také uvědomit, že pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ leží ve vektorovém prostoru V nad T, pak je také $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right]_\lambda$ vektorovým prostorem nad T. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{R}^4$, $P = \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5\right]_\lambda$. Nalezněte nějakou bázi P a určete $\dim P$.

2. Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. V závislosti na α určete $\dim\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\right]_\lambda$.

3. Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby soubor vektorů $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$ z $\mathbb{C}^3$ byl bází $\mathbb{C}^3$.

4. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je bází V nad $\mathbb{R}$. Nalezněte všechny hodnoty α, pro které je soubor $(\vec{x} + \alpha\vec{y} - \vec{z}, 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, \alpha\vec{x} + \vec{y})$ bází V.

5. Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ je soubor vektorů z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte bázi $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right]_\lambda$, která obsahuje vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{C}^3$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^3$ a nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou báze $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$. Nechť $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$. Nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{Y}$.

8. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3 a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor vektorů z V_3, přičemž $\vec{y}_1 = \vec{x}_2 - \vec{x}_3, \vec{y}_2 = 2\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3, \vec{y}_3 = 3\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 3\vec{x}_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je také báze, a najděte $(\vec{x})_{\mathcal{Y}}$, je-li $\vec{x} = 4\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 - 8\vec{x}_3$.

9. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3 a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor vektorů z V_3 a $\vec{x} \in V_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je také báze V_3 a najděte $(\vec{x})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$.

10. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou dvě báze $\mathbb{C}^3$, $(\vec{x}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Naleněte $(3\vec{x} + 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$ a $(3\vec{x} + 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$, víte-li, že $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Zkusíme dvojí postup (metoda (b) je rychlejší, ale musí se u ní trochu přemýšlet):
   (a) Mechanicky převedeme $\vec{y}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, do standardní báze, spočítáme $3\vec{x} + 2\vec{y}$ a pak najdeme jeho souřadnice v bázi $\mathcal{X}$.
   (b) Vypočítáme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} - (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} - 2(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}}$, pak najdeme $(3\vec{x}+2\vec{y})_{\mathcal{X}}$ a posléze $3\vec{x}+2\vec{y}$.

3 Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů $P + Q$, průnik podprostorů $P \cap Q$, 1. věta o dimenzi. A je důležité vědět, že $P + Q$ a $P \cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi.

1. Zjistěte, zda množina $M \subset \mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$,a pokud je, určete bázi a dimenzi M. (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)
   (a) $M = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}\}$,
   (b) $M = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$,
   (c) $M = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \wedge \alpha_2 = i\alpha_3\}$,
   (d) $M = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha_1^2 - \alpha_3^2 = 0\}$.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda$

a $Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_1 = \alpha_2 \wedge 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0\}$ a $Q = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0\}$.

5. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0\}$.