

## Lineární funkcionál

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární funkcionál, jádro, hodnota a defekt lineárního funkcionálu. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. [cvičení] Nechť je definován funkcionál (tj. zobrazení vektorového prostoru do tělesa)  $\varphi$  :

$\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  pro každé  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$  následujícím způsobem

(a)  $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ ,

(b)  $\varphi(\vec{x}) = 0$ ,

(c)  $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$ ,

(d)  $\varphi(\vec{x}) = \operatorname{Re}(x_1)$ ,

(e)  $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ , kde  $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$  a  $\mathcal{X}$  je báze prostoru  $\mathbb{C}^3$  definována následovně

$$\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

(f)  $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$  za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

Zjistěte, zda  $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ . V kladném případě najděte hodnotu  $h(\varphi)$ , defekt  $d(\varphi)$  a bázi  $\ker\varphi$ .

## Téma písemčky na příště

Lineární funkcionál - nalezení jádra a hodnoty.

## Lineární zobrazení

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární zobrazení, jádro, hodnota a defekt lineárního zobrazení, matice zobrazení. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. [cvičení] Nechť je definováno zobrazení  $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$  pro každé  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

následujícím způsobem

(a)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \operatorname{Im}(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$ ,

(b)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ ,

(c)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ .

Zjistěte, zda  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ . V kladném případě najděte hodnotu  $h(A)$ , defekt  $d(A)$  a bázi  $\ker A$ .

2. [cvičení] Nechť  $\mathcal{X}$  báze prostoru  $\mathbb{C}^3$  a  $\mathcal{Y}$  báze  $\mathbb{C}^2$  jsou definovány následovně  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

a  $\mathcal{Y} = \left( \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . V případech z předchozího cvičení, kdy  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ , sestavte

- (a)  $\mathcal{E}_3 A \mathcal{E}_2$ ,
- (b)  $\mathcal{E}_3 A \mathcal{Y}$ ,
- (c)  $\mathcal{X} A \mathcal{E}_2$ ,
- (d)  $\mathcal{X} A \mathcal{Y}$ .

3. [cvičení] Nechť  $\mathcal{X}$  báze prostoru  $\mathbb{C}^3$  a  $\mathcal{Y}$  báze  $\mathbb{C}$  jsou definovány následovně  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

a  $\mathcal{Y} = (-3)$ . Sestavte matici  ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$  funkcionálu  $\varphi$  z kapitoly Lineární funkcionál příkladu 1.(a) v bázích  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ .

4. Nechť  $A : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  definované následovně  $(A\vec{x})(t) = \vec{x}(t+1)$  pro každé  $\vec{x} \in \mathcal{P}_3$  a každé  $t \in \mathbb{C}$ . Ověřte, že  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ . Sestavte  ${}^{\mathcal{X}}A$ , kde  $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  je báze  $\mathcal{P}_3$ , v níž pro každé  $t \in \mathbb{C}$  platí

$$\vec{x}_1(t) = t - t^2, \quad \vec{x}_2(t) = 1 - t + t^2, \quad \vec{x}_3(t) = -1 + t.$$

5. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$  zadané obrazy bazických vektorů prostoru  $\mathbb{C}^3$  následovně

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sestavte  $\mathcal{E}_3 A \mathcal{E}_2$ .

6. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ,  $\mathcal{Y} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  je báze  $\mathbb{R}^3$  a nechť  $\mathcal{E}_2 A \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Sestavte  ${}^{\mathcal{X}}A \mathcal{E}_3$ , kde  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  je báze  $\mathbb{R}^2$ .

7. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(V_3)$ ,  ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  je báze  $V_3$ . Sestavte  ${}^{\mathcal{Y}}A$ ,  $\mathcal{Y} = (2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3, 3\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3)$ .

8. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ ,  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $\mathcal{Y} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ ,  ${}^{\mathcal{X}}A \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Nalezněte  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

9. [cvičení] Nechť  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$  a  $\mathcal{Y} = \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  jsou báze  $\mathbb{R}^2$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . Nechť  ${}^{\mathcal{X}}A \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  a nechť pro každý vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  platí  $B\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ , kde  $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Nalezněte  $\mathcal{E}_2(A + 2B)^{\mathcal{X}}$ .

10. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$ ,  ${}^{\mathcal{X}}A \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Úkoly:

- (a) Najděte bázi  $A(\mathbb{C}^4)$  a určete hodnotu  $h(A)$  a defekt  $d(A)$ .  
 (b) Najděte bázi jádra.  
 (c) Nalezněte všechna řešení rovnice  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

11. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$ . Zobrazení  $A$  je definováno obrazy bazických vektorů  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  a  $\mathcal{Y}B\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , báze  $\mathcal{Y}$  a  $\mathcal{Z}$  jsou tvaru

$$\mathcal{Y} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Z} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Nalezněte  $\varepsilon_2(BA)\mathcal{Z}$ .

12. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{X}A\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , kde  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  a  $\mathcal{Y} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ . Nechť  $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^\#$ ,  $\varepsilon_2\varphi\mathcal{Z} = (1, 1)$ , kde  $\mathcal{Z} = (3)$ . Najděte bázi jádra  $\varphi A$ .

13. [cvičení] Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ ,  $\varepsilon_3 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , kde  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ . V závislosti na parametru  $\alpha \in \mathbb{C}$  určete hodnotu zobrazení  $BA$ .

## Téma písemčky na příště

Lineární zobrazení - teoretická otázka.

## Téma písemčky na přespříště

Matice zobrazení - teoretická či praktická otázka.

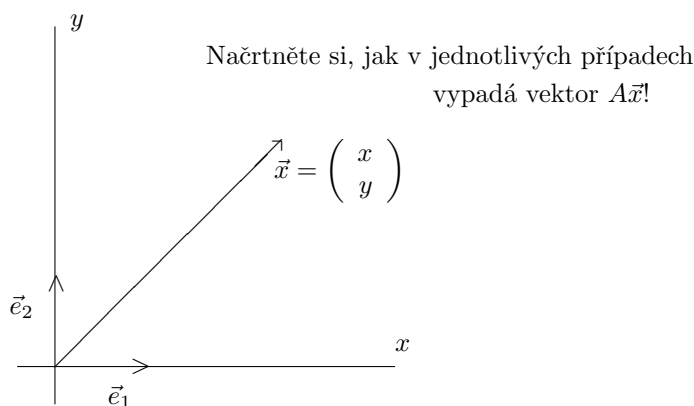
## Pro zajímavost

- Proč žádné zobrazení  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  není lineární?
- Nechť  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je definované pro každé  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  jako  $A\vec{x} = (\vec{x})_{\mathcal{X}}$ , kde  $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ . Najděte  $A(\{(\frac{1}{1}), (\frac{2}{2})\})$ ,  $A([\frac{1}{1}]_\lambda)$ ,  $A^{-1}(\{(\frac{1}{1}), (\frac{2}{2})\})$ ,  $A^{-1}([\frac{1}{1}]_\lambda)$ . Je  $A$  epimorfni, monomorfni?
- Nechť  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je definované pro každé  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  jako

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^\#(\vec{x}) \\ \vec{x}_2^\#(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ . Najděte  $A(\{(\frac{1}{1}), (\frac{2}{2})\})$ ,  $A([\frac{1}{1}]_\lambda)$ ,  $A^{-1}(\{(\frac{1}{0}), (\frac{2}{0})\})$ ,  $A^{-1}([\frac{1}{1}]_\lambda)$ .  
Je  $A$  epimorfni, monomorfni?

4. [cvičení] Necht  $\mathbb{A}$  je reálná matice typu  $2 \times 2$ . Definujeme zobrazení  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  předpisem  $A\vec{x} := \mathbb{A} \cdot \vec{x}$  pro každé  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ . Ověřte, že  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . Zkontrolujte, že operátory  $A$  určené následujícími maticemi  $\mathbb{A}$  působí tak, jak je uvedeno v závorkách.



- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ( $A$  je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy  $x$ .)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ( $A$  je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy  $x = y$ .)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ( $A$  je **středová souměrnost**.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ( $A$  je **rotace** o úhel  $\theta$  po směru hodinových ručiček, matici se říká *elementární matice rotací*.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ( $A$  je **prodloužení** respektive **zkrácení** ve směru  $x$ .)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ( $A$  je **zkosení** ve směru  $x$ .)

5. Necht  $P, Q$  jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Necht  $A : P \rightarrow Q$  je izomorfismus. Ověřte a zapamatujte si:

- (a)  $\dim P = \dim Q$
- (b) Je-li  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  LN soubor, pak  $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$  je LN. (Na toto tvrzení stačí  $A$  monomorfni.)
- (c) Je-li  $P_1 \subset\subset P$  a  $\dim P_1 = k$ , pak  $A(P_1) \subset\subset Q$  (na to stačí linearita  $A$ ) a  $\dim A(P_1) = k$ .
- (d) Je-li  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  báze  $P$ , pak  $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$  je báze  $Q$ .
- (e) Analogická tvrzení platí i pro  $A^{-1}$ .

6. [cvičení] Jak je možné, že funkcionál  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaný pro každý vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  jako

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

není prostý, ačkoliv  $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$ ?

7. Ukažte, že následující zobrazení  $\mathbb{R}^3$  do  $\mathbb{R}^2$  nejsou lineární. Pro každé  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  definujeme

- (a)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,
- (b)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1+3x_2 \\ x_3-2 \end{pmatrix}$ ,
- (c)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$ ,
- (d)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1-\sqrt{|x_2|} \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,
- (e)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,
- (f)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ e^{x_3} \end{pmatrix}$ .

8. Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě – počátku) v rovině. Nechť je dána přímka  $p$  procházející počátkem. Rozmyslete si, že zobrazení, které každému vektoru přiřadí jeho kolmou projekci na přímku  $p$ , je lineární a že jeho jádrem je přímka  $q$  procházející počátkem a kolmá na  $p$  a jeho oborem hodnot je přímka  $p$ . Rozmyslete si analogickou úlohu v prostoru, tj. kolmou projekci vektorů na rovinu procházející počátkem.

## Výsledky: Lineární funkcionál

1. (a)  $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ ,  $h(\varphi) = 1$ ,  $d(\varphi) = 2$ , báze jádra je např.  $\left( \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
- (b)  $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ ,  $h(\varphi) = 0$ ,  $d(\varphi) = 3$ , báze jádra je např.  $\mathcal{E}_3$
- (c)  $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$
- (d)  $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$
- (e)  $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ ,  $h(\varphi) = 1$ ,  $d(\varphi) = 2$ , báze jádra je např.  $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- (f)  $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ ,  $h(\varphi) = 1$ ,  $d(\varphi) = 2$ , báze jádra je např.  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

## Výsledky: Lineární zobrazení

1. (a)  $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$
- (b)  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ ,  $h(A) = 2$ ,  $d(A) = 1$ , báze jádra je např.  $\left( \begin{pmatrix} -2-i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
- (c)  $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$
2. (a)  $\mathcal{E}_3 A \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (b)  $\mathcal{E}_3 A \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} i & -i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (c)  ${}^X A \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} -i & -2-i & -2-i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (d)  ${}^X A \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} -1+2i & -1+3i & -1+2i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$3. \quad {}^X\varphi^Y = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$4. \quad {}^X A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \varepsilon_3 A \varepsilon_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad {}^X A \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 23 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad {}^Y A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \varepsilon_2(A + 2B)^X = \begin{pmatrix} -81 & -27 \\ -56 & -19 \end{pmatrix}$$

10. (a) báze  $A(\mathbb{C}^4)$  je např.  $\mathcal{E}_2, h(A) = 2, d(A) = 2$

(b) báze jádra je např.  $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

(c)  $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$

$$11. \quad \varepsilon_2(BA)^Z = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

12. báze jádra  $\varphi A$  je např.  $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

13. pro  $\alpha \neq -3$  je  $h(BA) = 3$ , pro  $\alpha = -3$  je  $h(BA) = 2$