

Báze a dimenze, souřadnice vektoru v bázi

Z teorie je třeba znát pojmy: báze, dimenze, souřadnice vektoru v bázi, standardní báze prostorů T^n , $T^{m,n}$ a \mathcal{P}_n .

Je třeba umět: vybrat bázi ze souboru generátorů, doplnit LN soubor na bázi.

Dobré je si také uvědomit, že pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ leží ve vektorovém prostoru V nad T , pak je také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ vektorovým prostorem nad T . Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. **[cvičení]** Nechtě $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_5 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ jsou vektory z \mathbb{C}^4 . Nalezněte nějakou bázi $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5]_\lambda$. Vyjádřete vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5$ jako lineární kombinace nalezené báze.

2. **[cvičení]** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi následujícího lineárního obalu souboru vektorů z \mathbb{C}^4 :

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

3. Nechtě V je vektorový prostor nad T . Nechtě $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je bázi V nad T . Nalezněte všechny hodnoty α , pro které je soubor $(\vec{x} + \alpha\vec{y} - \vec{z}, 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, \alpha\vec{x} + \vec{y})$ bázi V .

4. **[cvičení]** Nechtě $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou vektory z \mathbb{C}^4 . Nalezněte bázi $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, která obsahuje

(a) vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$,

(b) vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. **[cvičení]** Nechtě $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z \mathbb{C}^3 , kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Dokažte, že } \mathcal{X} \text{ je báze } \mathbb{C}^3, \text{ a nalezněte } (\vec{x})_{\mathcal{X}}, \text{ je-li}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. [cvičení] Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou dvě báze \mathbb{C}^3 , kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li

$$(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. [cvičení] Necht V_3 je vektorový prostor nad tělesem T . Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3 a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor vektorů z V_3 a $\vec{x} \in V_3$. Dokažte, že \mathcal{Y} je také báze V_3 , a najděte

$$(\vec{x})_{\mathcal{Y}}, \text{ je-li } (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ a } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. [cvičení] Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze \mathbb{C}^3 a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Určete } (\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} \text{ a } (\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}.$$

9. [cvičení] Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze \mathcal{P}_3 a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{P}_3$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\vec{x}_1(t) = 2 + 2t - t^2, \vec{x}_2(t) = 2 - t + 2t^2, \vec{x}_3(t) = -1 + 2t + 2t^2.$$

$$\text{Dále necht } (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y})_{\mathcal{X}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Určete } (\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} \text{ a } (\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}.$$

Téma písemčky na příště

Teoretická otázka týkající se báze, dimenze, souřadnic vektoru v bázi.

Téma písemčky na přespříště

Praktická úloha týkající se báze, dimenze, souřadnic vektoru v bázi.

Pro zajímavost

1. Dokažte: Každý jednoprvkový soubor (α) , kde $\alpha \neq 0$ je číslo z tělesa T , je bází vektorového prostoru T nad T . Žádné jiné báze neexistují.
2. Najděte několik bází vektorového prostoru \mathbb{C} nad \mathbb{R} .
3. Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Rozmyslete si, že bází takového prostoru je každá dvojice šipek, které neleží v jedné přímce. Podobně, každá trojice šipek, které neleží v jedné rovině, je bází vektorového prostoru šipek (začínajících ve stejném bodě) v prostoru.

4. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných

- (a) na intervalu $(0, \pi)$,
- (b) na množině $\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Najděte bázi $[f, g]_\lambda$, je-li $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

5. Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{R} , kde $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Najděte bázi a dimenzi V .

Výsledky: Báze a dimenze, souřadnice vektoru v bázi

1. Báze např. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4)$,

$$\vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_4$$

$$\vec{x}_2 = 0 \cdot \vec{x}_1 + 1 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_4$$

$$\vec{x}_3 = -\vec{x}_1 + 1 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_4$$

$$\vec{x}_4 = 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 1 \cdot \vec{x}_4$$

$$\vec{x}_5 = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 1 \cdot \vec{x}_4$$

2. (a) Pro $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -3$ je $\dim = 4$,

(b) pro $\alpha = 1$ je $\dim = 1$,

(c) pro $\alpha = -3$ je $\dim = 3$.

3. Báze pro $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 3$.

4. (a) Báze je např. $(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$, resp. $(\vec{x}, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

(b) Báze je např. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_1)$, resp. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_2)$.

5. \mathcal{X} je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, neboť $\vec{x} = 2 \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3 \cdot \vec{x}_3$

6. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7. \mathcal{Y} je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. Je vhodné si uvědomit, že u vektorů v T^n platí $(\vec{x})_{\mathcal{E}} \equiv \vec{x}$.

$$(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}, (\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

9. Ze zadání plyne $(\vec{x}_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{x}_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(\vec{x}_3)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Příklad je tedy numericky totožný s příkladem 8) a proto výsledek je opět

$$(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}, (\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Pro zajímavost:

1. Každé číslo $\vec{x} \in T^n$ lze psát $\vec{x} = \frac{x}{\alpha} \odot \vec{\alpha}$ (vyznačeno, kdy chápeme x jako číslo a kdy jako vektor z T^1)
2. Např. $(1, i)$, resp. každý soubor dvou nenulových komplexních čísel, kde jedno není reálný násobek druhého.
- 3.
4. (a) Báze je např. soubor (f, g) .
(b) Báze je např. soubor (g) .
5. Báze je kterékoliv kladné číslo různé od 1 $\implies \dim V = 1$.