

Lineární (ne)závislost

Z teorie je třeba znát pojmy: lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární (ne)závislost, lineární obal. Je nutné umět rozhodnout, zda má soustava lineárních algebraických rovnic řešení, a pokud má, tak umět aspoň jedno najít. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. [cvičení] Rozhodněte, zda soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ z \mathbb{R}^3 je LZ nebo LN.

(a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$,

(b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

(c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. [cvičení] Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T . Zjistěte, zda soubor $(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, 4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}, 4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z})$ je LZ nebo LN.

3. [cvičení] Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která je soubor vektorů z \mathbb{C}^3 $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$ LZ.

4. [cvičení] Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z \mathbb{C}^3 . Zjistěte, který z vektorů \vec{x} a \vec{z} leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. [cvičení] Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T . Zjistěte, který z vektorů \vec{u} a \vec{v} leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

$$\vec{x}_1 = -5\vec{y} + 4\vec{z}, \vec{x}_2 = \vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z}, \vec{x}_3 = 2\vec{x} - \vec{y} + 8\vec{z}, \vec{u} = \vec{x} + 7\vec{y} - 2\vec{z}, \vec{v} = 2\vec{x} - \vec{z}.$$

6. [cvičení] Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z \mathbb{R}^3 a $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Nalezněte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

(a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$,

(b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$,

(c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix}$,

(d) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix}$.

7. [cvičení] Necht $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T . Označme $\mathcal{Y} = (\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z}, -\vec{x} + \alpha\vec{z}, \vec{x} + 2\alpha\vec{y} + 8\vec{z})$. Naleznete všechna $\alpha \in T$ taková, že \mathcal{Y} je LZ a vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ leží v lineárním obalu \mathcal{Y} .

8. [cvičení] Připomeňme nejprve, že \mathcal{P}_3 je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 2 s přidáním nulového polynomu. Necht $\vec{x} \in \mathcal{P}_3$ a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z \mathcal{P}_3 tak, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\vec{x}_1(t) = 1 + t - 2t^2, \quad \vec{x}_2(t) = 7 - 8t + 7t^2, \quad \vec{x}_3(t) = 3 - 2t + t^2, \quad \vec{x}(t) = 2 + 4t - t^2.$$

Zjistěte, zda $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$.

9. [cvičení] Necht $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z \mathcal{P}_5 takový, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\vec{x}_1(t) = 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4, \quad \vec{x}_2(t) = 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4, \quad \vec{x}_3(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4.$$

Zjistěte, pro jaké parametry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ je soubor LZ.

Téma písemčky na příště

Mějme vektorový prostor V nad T a soubor vektorů v něm. Rozhodněte, zda je soubor LZ či LN, případně zjistěte, zda patří nějaký vektor do lineárního obalu souboru.

Pro zajímavost

1. [cvičení] Je následující soubor vektorů LZ

$$\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix} \right)$$

(a) v \mathbb{C}^3 nad \mathbb{C} ?

(b) v \mathbb{C}^3 nad \mathbb{R} ?

2. [cvičení] Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Co je lineárním obalem dvou vektorů, které leží v jedné přímce? Co je lineárním obalem dvou vektorů, které neleží v jedné přímce? Zamyslete se i nad lineárním obalem dvou a tří vektorů v prostoru.

3. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. necht $f, g \in V$ a necht $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t) \quad \text{pro každé } t \in (a, b).$$

Uvažujme nekonečnou spočetnou množinu $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}$, kde $e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2, e_4(t) = t^3$ pro každé $t \in (a, b)$. Čemu je rovna množina tvořená lineárními kombinacemi všech souborů tvořených konečně mnoha prvky z M .

4. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných

(a) na intervalu $(0, \pi)$,

(b) na množině $\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Ověřte, že (f, g) je LN soubor v případě (a) a LZ v případě (b), je-li $f(t) = \sin t, g(t) = \cos t$.

5. [cvičení] Necht V je vektorový prostor nad \mathbb{R} , kde $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Rozhodněte, zda je soubor (x, y) LZ, pokud

(a) $x = 1, y = 3$,

(b) $x = 2, y = 3$,

(c) vektory x a y jsou zvoleny libovolně.

Výsledky: Lineární (ne)závislost

- (a) LZ, např. $-\vec{x}_1 - 5\vec{x}_2 + 3\vec{x}_3 = \vec{o}$.
(b) LN.
(c) LZ, např. $-\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 3\vec{x}_3 = \vec{o}$.
- LZ, např. $8(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}) - 3(4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}) + (4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z}) = \vec{o}$
- LZ $\iff \alpha = 0 \vee \alpha = \sqrt{2} \vee \alpha = -\sqrt{2}$
- $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, např. $\vec{x} = 3\vec{x}_1 - \vec{x}_2$
 $\vec{z} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$
- $\vec{u} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, např. $\vec{u} = 3\vec{x}_2 - \vec{x}_3$
 $\vec{v} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$
- (a) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda \iff \alpha = 1$
(b) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda \iff \alpha \neq -2$
(c) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ vždy.
(d) $\vec{x} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ nikdy.
- LZ $\iff \alpha = 2 \vee \alpha = -4$, ale jen pro $\alpha = 2$ leží vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ v lineárním obalu \mathcal{Y} .
- $\vec{x} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$.
- LZ pro $\alpha = 8, \beta = 20, \gamma = -13$.

Pro zajímavost:

- (a) LZ např. $-2 \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} + (1+i) \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(b) LN, neboť neexistuje reálné řešení příslušné homogenní soustavy.
- Pokud vektory stejného směru umístíme do jediného bodu, vyplní lineární kombinace přímku procházející tímto bodem, pokud mají směry různé, vyplní celou rovinu.
V prostoru vyplní přímku resp. rovinu procházející tímto bodem, resp. vyplní celý prostor.
- Množina je totožná s \mathcal{P} .
- $\alpha \odot x \oplus \beta \odot y = o \iff x^\alpha y^\beta = 1$
a) LZ zdůvodnění např. "soubor obsahuje nulový vektor"
b) LZ zdůvodnění např. " $3 = 2^{\log_2 3} \iff 3 = \log_2 3 \odot 2$ ".
- vždy LZ zdůvodnění např. "dim $V = 1$, neboť V má jednočlennou bázi např. e (nakreslete si graf e^x). Každý vícečlenný soubor je tedy LZ".