Zkoušková písemka LAP 30.1.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & \beta y & + & \beta z & = & 1 \\ \beta x & + & \alpha y & + & \beta z & = & 1 \\ \beta x & + & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}.$$

   Napište závěr, ve kterém všechny možné situace shrnete.

2. Nechť $W = W_1 \cap W_2$.

$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 1\}, \quad \text{kde } (\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ a } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ je báze } \mathbb{R}^3.$$

$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$$

   Najděte $A^{-1}(W)$, je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ -2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$. Nechť A_P je projektor na P podle Q a D operátor derivování na $\mathcal{P}_3$ (prostor polynomů stupně maximálně 2 s přidáním nulového polynomu), kde

$$Q = [q]_\lambda \quad \text{a} \quad q(t) = 1 + \alpha t^2 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C},$$
$$P = \{p \in \mathcal{P}_3 \mid p(1) = 0\}.$$

   (a) Má-li smysl $A_P D$, najděte všechna řešení $(A_P D)x = \alpha e_2$ v závislosti na parametru α.

   (b) Má-li smysl $D A_P$, najděte všechna řešení $(D A_P)x = \alpha e_2$ v závislosti na parametru α.

   Kde e_1 značí první a e_2 druhý vektor standardní báze $\mathcal{P}_3$, tj. $e_1(t) = 1$ a $e_2(t) = t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.