Zkoušková písemka LAP 27.1.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Najděte množinu všech reálných řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & \alpha^3 \\ x & + & \beta y & + & \beta^2 z & = & \beta^3 \\ x & + & \gamma y & + & \gamma^2 z & = & \gamma^3 \end{array}.$$

   Napište závěr, ve kterém všechny možné situace shrnete.

2. Nechť $W, K \subset \mathbb{R}^3$, nechť dále $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 2 - \alpha \wedge \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha\alpha_3\},$$

   kde $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$ splňuje $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Nechť dále K je úsečka spojující body $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pro jaké parametry $\alpha \in \mathbb{R}$ je $W \cap K \neq \emptyset$?

3. Nechť $\mathcal{X} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ je báze $\mathcal{P}_2$ (prostor polynomů stupně maximálně 1 s přidáním nulového polynomu), kde (e_1, e_2) je standardní báze $\mathcal{P}_2$, nechť dále $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{C}^3)$ splňuje $Ax(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \\ 2\alpha_0 \end{pmatrix}$, je-li $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathcal{P}_2)$ je zadané maticí v bázích ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Najděte

   (a) matici zobrazení AB ve standardních bázích, existuje-li,

   (b) matici zobrazení BA ve standardních bázích, existuje-li.