Zkoušková písemka LAP 23.1.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \beta y & + & \beta z & = & 1 \\ \beta x & + & \alpha y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array} .$$

   Napište závěr, ve kterém všechny možné situace shrnete.

2. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, nechť dále $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{E}_4$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = ((\frac{1}{2}))$ je báze $\mathbb{R}$.

$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi_1(\vec{x}) = 1 \wedge \varphi_2(\vec{x}) = 2\},$$

   kde $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^4)^\#$ a $(\varphi_1)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a ${}^{\mathcal{X}}\varphi_2{}^{\mathcal{Y}} = (6\ 4\ 0\ 2)$,

$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\alpha .$$

   Pro jaké $\beta \in \mathbb{R}$ jsou lineární variety W_1 a W_2

   (a) rovnoběžné,

   (b) různoběžné?

3. Nechť S je operátor integrování na $\mathcal{P}_3$ (prostor polynomů stupně maximálně 2 s přidáním nulového polynomu) a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ zadané maticí v bázi $\mathcal{X}$ a standardní bázi ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $x_1(t) = t + t^2$, $x_2(t) = 1 - t^2$, $x_3(t) = -2t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte všechna řešení $Ax - 2Sx = e_3 + 2e_4$, kde $e_3(t) = t^2$ a $e_4(t) = t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.