Zkoušková písemka LAP 13.1.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ (1+2\alpha\beta)x & + & \alpha^2\beta y & + & \alpha\beta z & = & 1 \\ \alpha^2\beta x & + & \alpha^3\beta y & + & (2-\alpha)\beta z & = & \beta \end{array}.$$

2. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ a $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Určete, pro jaké hodnoty parametru α existuje přímka rovnoběžná s W_2, protínající W_1 a procházející bodem $\vec{a}$. Pro takové parametry najděte její parametrické rovnice.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array},$$

$$W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 0 \ \wedge \ \vec{x}_2^{\#}(\vec{x}) = -2\},$$

kde $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$.

3. Nechť A_P je projektor na P podle Q a D operátor derivování na $\mathcal{P}_3$ (prostor polynomů stupně maximálně 2 s přidáním nulového polynomu), kde

$$Q = [q]_\lambda \quad \text{a} \quad q(t) = 1 + t + t^2 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C},$$
$$P = \{p \in \mathcal{P}_3 \mid p(-1) = 0\}.$$

Najděte všechna řešení $3Dx - 2A_Px = 3e_1$
(e_1 značí první vektor standardní báze, tj. $e_1(t) = 1$ pro každé $t \in \mathbb{C}$).