Zkoušková písemka LAP 9.1.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Určete, pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je soustava řešitelná, případně určete dimenzi množiny řešení.
$$\begin{array}{rcrcrcl} \beta^2 x & + & y & + & \beta z & = & \beta \\ \alpha x & - & \beta y & + & z & = & \beta^2 \\ \alpha^2 x & + & y & + & \beta z & = & \alpha \end{array}.$$

2. Nechť $W = W_1 \cap W_2$.
$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 1\}, \quad \text{kde } (\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ je báze } \mathbb{R}^3.$$
$$W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$
Nechť K je nejmenší konvexní množina obsahující vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ z $\mathbb{R}^3$.
   (a) Určete, jakým typem lineární variety jsou W_1, W_2 a W.
   (b) Najděte $W \cap K$.

3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je dané maticí v bázích
$$^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \alpha & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
kde $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Nechť A_P je projektor na P podle Q, kde $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$ jsou podprostory $\mathbb{R}^3$. Pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ definujeme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, je-li $A_P(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Má-li smysl AB, najděte $\ker(AB)$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Má-li smysl BA, najděte $\ker(BA)$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.