Zkoušková písemka LAP 6.2.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$. V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \beta y & + & \alpha\beta z & = & \alpha \\ x & + & \alpha y & + & \beta z & = & \alpha\beta \\ \alpha\beta x & + & y & + & \alpha z & = & \beta \end{array} .$$

   Napište závěr, ve kterém všechny možné situace shrnete.

2. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{E}_2$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$,

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4, \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}\}.$$

   Najděte $A^{-1}(W)$ v závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$, je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2\beta & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Najděte všechna řešení z $\mathcal{P}_3$ (prostor polynomů stupně maximálně 2 s přidáním nulového polynomu) rovnice

   (a) $(A_P - SD)x = y$,

   (b) $(A_P - DS)x = y$,

   kde $y(t) = 1 + t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. S je operátor integrování, D je operátor derivování a A_P je projektor na P podle Q, přičemž $P = [e_3, e_1 - e_2]_\lambda$ a $Q = [e_2]_\lambda$ a (e_1, e_2, e_3) je standardní báze $\mathcal{P}_3$.