Zkoušková písemka LAP 3.2.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.
$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha\beta y & + & \beta z & = & 1 \\ -\beta x & + & \beta y & + & \beta z & = & \beta \\ \alpha\beta x & + & \alpha y & - & \beta z & = & 1 \end{array}.$$
Napište závěr, ve kterém všechny možné situace shrnete.

2. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$.
$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(\vec{x}) = -4\},$$
kde ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}} = (2\ 1\ 1\ 2)$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = ((2))$ je báze $\mathbb{R}$.
$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$$
Pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ existuje příčka variet W_1 a W_2 rovnoběžná s varietou W a procházející bodem $\vec{a}$, je-li
$$W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 1 - \beta t \\ z & = & 2 - t \\ u & = & 1 - t \end{array} \quad \text{a} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $B\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \end{pmatrix}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ splňující $(\vec{x})_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. U následujících rovnic najděte všechna řešení těch, které mají smysl:
   (a) $AB\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   (b) $AB\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
   (c) $BA\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   (d) $BA\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.