Zkoušková písemka LAZ 30.1.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 9x & + & 4y & + & \alpha^2 z & = & \alpha + 2 \\ 3x & + & 2y & + & \alpha z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} .$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více než jedno řešení.

   (c) Ve všech případech, kdy má soustava řešení, alespoň jedno řešení spočtěte.

2. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^4$, nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathbb{C}^4$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^4$.

$$(\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x}_3)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Lze soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ doplnit na bázi $\mathbb{C}^4$? Vysvětlete.

   (b) Pokud ano, doplňte jej na bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{C}^4$.

   (c) Najděte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$

   (d) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ je zadané pomocí matice v bázích ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{E}_3$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$.

   (a) Najděte $h(B)$ a $d(B)$.

   (b) Najděte $\ker B$.

   (c) Vysvětlete, zda B je monomorfní nebo epimorfní zobrazení.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Nechť pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

   Najděte

(a) $h(A)$ a $d(A)$,

(b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$,

(c) $\ker A$,

(d) vzor množiny $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte složené zobrazení.
   (b) Jaký je vztah mezi hodností složeného zobrazení a hodnostmi skládaných zobrazení?
   (c) Co platí pro matici v bázích složeného zobrazení?

2. (a) Definujte izomorfismus (nápověda: jde o zobrazení se třemi vlastnostmi) a každou z vlastností vysvětlete.
   (b) Definujte izomorfismus vektorových prostorů.
   (c) Uveďte příklad dvou prostorů P a Q, které jsou izomorfní, ale $P \neq Q$. Vysvětlete, proč jsou izomorfní.

3. (a) Definujte lineárně závislý soubor.
   (b) Dokažte, že soubor obsahující nějaký vektor a jeho trojnásobek, tj. $\vec{x}$ a $3\vec{x}$, je lineárně závislý.
   (c) Mezi následujícími tvrzeními rozhodněte, která jsou pravdivá. U nepravdivých uveďte protipříklad.
      i. Vypustíme-li z lineárně závislého souboru vektor, zůstane soubor lineárně závislý.
      ii. V lineárně závislém souboru existuje vektor, který je lineární kombinací předchozích vektorů v souboru.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13-14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15-16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17-18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.