Zkoušková písemka LAZ 25.1.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}.$$
   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.
   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více než jedno řešení.
   (c) V případě, kdy soustava má více řešení, alespoň jedno řešení spočtěte.

2. Nechť je dán soubor $\mathcal{X}$ v $\mathbb{C}^4$
$$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$
   (a) Najděte dimenzi lineárního obalu souboru $\mathcal{X}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$.
   (b) Určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ lze soubor doplnit na bázi $\mathbb{C}^4$. V takovém případě jej doplňte na bázi $\mathbb{C}^4$.

3. Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^4)^\#$. Nechť pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ platí
$$\varphi(\vec{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$
   Určete $h(\varphi)$ a $d(\varphi)$. Najděte bázi ker φ
   (a) obsahující vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
   (b) obsahující vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li
$$P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Nechť $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^2$. Nechť pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 4x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}.$$
   Najděte

(a) $h(A)$ a $d(A)$,

(b) ${}_{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{E}_3}$,

(c) $\ker A$,

(d) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)

1. (a) Definujte soubor generátorů a bázi.
   (b) Definujte dimenzi.
   (c) O následujících tvrzení rozhodněte, zda jsou pravdivá či ne. Nepravdivá vyvraťte protipříkladem.
      i. Je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ LN soubor ve vektorovém prostoru V dimenze n, pak je $\mathcal{X}$ bází V.
      ii. Je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ souborem generátorů vektorového prostoru V, pak je $\mathcal{X}$ bází V.
2. (a) Definujte podprostor.
   (b) Dokažte, že průnik podprostorů je podprostor.
   (c) Může se stát, že $P \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor konečné dimenze, $\dim P = \dim V$ a $P \cap V \neq V$? Vysvětlete.
3. (a) Definujte vzor množiny.
   (b) Co platí pro vzor podprostoru?
   (c) Definujte jádro lineárního zobrazení a vysvětlete, odkud plyne, že je podprostorem?

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.