Zkoušková písemka LAZ 23.1.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Najděte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která je soubor $\mathcal{X}$ z $\mathbb{C}^4$ lineárně závislý. Pro všechny parametry $\alpha \in \mathbb{C}$, kdy je LZ, dokažte podle definice, že je LZ.
$$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$.
   (a) Najděte předpis $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \ldots$ pro každé $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Najděte $h(A), d(A), \ker A$.

3. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ je soubor v $\mathbb{R}^4$, kde
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Doplňte soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ na bázi
   (a) $P = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,
   (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$.

4. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$.
   (a) Najděte bázi a dimenzi $P + Q$ a $P \cap Q$.
   (b) Zjistěte, zda Q je doplněk P do $\mathbb{R}^3$.

5. Nechť $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$
   je báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$,
   ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Určete $h(B), d(B)$.

(b) Najděte ker B.

(c) Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.
   (b) Vyslovte větu o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je lineární zobrazení.
   (c) Jak hledáme řešení $A\vec{x} = \vec{b}$, známe-li matici zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$?
2. (a) Definujte součin matic.
   (b) Rozhodněte, zda je součin matic
      i. asociativní,
      ii. komutativní.

   Pokud ano, zapište, co to znamená. Pokud ne, uvedte protipříklad.

   (c) Vyjmenujte 3 ekvivalentní řádkové úpravy, jejichž pomocí lze každou matici převést do horního stpňovitého tvaru.
3. (a) Definujte hodnost lineárního zobrazení.
   (b) Vyslovte větu o hodnosti složeného zobrazení.
   (c) Dokažte, že je-li některé ze skládaných zobrazení izomorfní, pak se v příslušném vztahu z předchozí věty nabývá rovnost.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.