Zkoušková písemka LAZ 18.1.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \alpha^2 z & = & -1 \\ -ix & + & iy & & & = & -i \end{array}.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která má soustava jediné řešení, a toto řešení spočítejte.

   (c) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která má soustava více řešení. V takovém případě najděte dvě různá řešení.

2. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Zjistěte, pro jaká $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je soubor

$$\mathcal{Y} = (2\vec{x}_1 - \vec{x}_3, \alpha\vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

   lineárně závislý a zároveň $\vec{y} = \vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 - \vec{x}_3$ leží v lineárním obalu $\mathcal{Y}$.

3. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze $\mathbb{R}^3$, kde $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Najděte $5\vec{x} - 3\vec{y}$, víte-li, že $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Je-li $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, najděte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$.

   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_2 \right\}$,

   (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 = -x_2^2 \right\}$.

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované pro každé $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

   Dále nechť $\varphi \in \mathbb{R}^{2\#}$, kde ${}^{\mathcal{E}_2}\varphi^{\mathcal{E}_1} = (1 \;\; -1)$ a $\mathcal{E}_2$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{E}_1$ je standardní báze $\mathbb{R}$.

(a) Existuje-li $A\varphi$ (tedy složené zobrazení), najděte $h(A\varphi), d(A\varphi), \ker(A\varphi)$.

(b) Existuje-li φA, najděte $h(\varphi A), d(\varphi A), \ker(\varphi A)$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte prosté zobrazení a zobrazení "na" (surjektivní).
   (b) Vyslovte větu, která popisuje, kdy je lineární zobrazení prosté.
   (c) Co platí podle 2. věty o dimenzi pro defekt epimorfního zobrazení? Vysvětlete.
2. (a) Definujte direktní součet množin.
   (b) Jak lze ověřit jednodušším způsobem než podle předchozí definice, že součet podprostorů je direktní?
   (c) Ověřte, že součet podprostorů je podprostor.
3. (a) Definujte souřadnici vektoru v nějaké bázi.
   (b) Definujte lineární funkcionál.
   (c) Definujte i-tý souřadnicový funkcionál v nějaké bázi.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.