Zkoušková písemka LAZ 16.1.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ \alpha x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 2\alpha y & + & 4z & = & 2 \end{array}.$$
   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.
   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava jediné řešení, a toto řešení spočítejte.
   (c) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více řešení. V takovém případě najděte dvě různá řešení.

2. Nechť $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$, nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathbb{R}^3$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3,\ \vec{z} = (\vec{y})_{\mathcal{Y}}.$$
   (a) Zjistěte, zda $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?
   (b) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [11\vec{x}_2, 3\vec{x}_1, \vec{x}_3]_\lambda$?
   (c) Zjistěte, zda $\vec{z} \in [-\vec{x}_1, -2\vec{x}_2]_\lambda$?

3. Najděte
   (a) bázi $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
   (b) bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, která obsahuje $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li
$$P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 = 0 \right\}.$$

5. Nechť $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Nechť ${}^{\mathcal{Y}}A$ (=${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Y}}$) má tvar
$${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Najděte

(a) $h(A)$ a $d(A)$,

(b) ker A,

(c) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(d) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte matici lineárního zobrazení v bázích.
   (b) Vyslovte větu, ve které je $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ vyjádřeno pomocí matice zobrazení A v nějakých bázích.
   (c) Vyslovte větu o matici složeného zobrazení v bázích.
2. (a) Definujte hodnost, jádro a defekt lineárního zobrazení.
   (b) Jakou hodnost může mít lineární funkcionál? Vysvětlete.
   (c) Vyslovte 2. větu o dimenzi. Co z ní plyne pro hodnost monomorfního zobrazení? Vysvětlete.
3. (a) Definujte lineárně závislý soubor.
   (b) Uveďte alternativní definici lineárně závislého souboru (tedy větu, ve které bude tvrzení tvaru: soubor $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je LZ, právě když ...).
   (c) Dokažte, že soubor obsahující dva stejné vektory je lineárně závislý.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.