Zkoušková písemka LAZ 11.1.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z, u \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & & & \alpha u & = & \alpha \\ \alpha x & + & y & & & & & = & 1 \\ & & & & \alpha z & + & u & = & 1 \\ & & \alpha y & + & z & & & = & 1 \end{array}.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více než jedno řešení.

   (c) V případě, kdy má soustava řešení, alespoň jedno řešení spočtěte.

2. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^4$, nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathbb{C}^4$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^4$.

$$(\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x}_3)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Rozhodněte, zda je soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ lineárně nezávislý.

   (b) Zjistěte, zda $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

   (c) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

3. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ jsou soubory v $\mathbb{R}^4$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Doplňte soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ na dvě různé báze prostoru $\mathbb{R}^4$.

   (b) Najděte dva různé doplňky podprostoru $[\vec{x}_1, \vec{x}_2]_\lambda$ do $\mathbb{R}^4$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 \wedge x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Nechť pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

   Najděte

(a) $h(A)$ a $d(A)$,

(b) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$,

(c) $\ker A$,

(d) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte lineární zobrazení.
   (b) Definujte složené zobrazení a vyslovte větu o linearitě složeného zobrazení.
   (c) Vyslovte větu, která říká, jak poznáme prostotu lineárního zobrazení.
2. (a) Definujte podprostor.
   (b) Definujte součet, sjednocení a průnik dvou podprostorů.
   (c) Z následujících tvrzení vyberte pravdivá. Nepravdivá vyvraťte protipříkladem.
      i. Součet dvou podprostorů je podprostor.
      ii. Sjednocení dvou podprostorů je podprostor.
      iii. Průnik dvou podprostorů je podprostor.
3. (a) Definujte lineární obal.
   (b) Z následujících tvrzení pravdivá dokažte, nepravdivá vyvraťte protipříkladem.
      i. Každý podprostor konečné dimenze lze psát jako lineární obal nějakých vektorů.
      ii. Každý lineární obal je podprostorem.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.