Zkoušková písemka LAZ 9.1.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & & & = & 1 \\ x & + & \alpha y & & & = & \alpha \\ & & y & + & \alpha z & = & 0 \end{array}.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více než jedno řešení.

   (c) V případě, kdy soustava má více řešení, alespoň jedno řešení spočtěte.

2. Nechť soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor z $\mathbb{C}^3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ -i \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

   (a) Rozhodněte, zda je soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ lineárně nezávislý.

   (b) Pro jaké parametry $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

   (c) Pro jaké parametry $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $[\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{y}]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

3. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou soubory v $\mathbb{R}^4$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Doplňte $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ na bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{R}^4$.

   (b) Doplňte $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ na bázi $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^4$.

   (c) Najděte $(\vec{z})_\mathcal{X}$, pokud $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$. Nechť pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ platí

$$\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \quad \text{kde } (\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ a } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ je báze } \mathbb{C}^3.$$

   Najděte

   (a) $h(\varphi)$ a $d(\varphi)$,

(b) $\ker\varphi$,

(c) všechna řešení rovnice $\varphi(\vec{x}) = 5$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)

1. (a) Definujte lineárně nezávislý soubor.

   (b) Z následujících tvrzení o LN a LZ souborech pravdivá dokažte a nepravdivá vyvraťte protipříkladem.

   i. Vyhodíme-li z LZ souboru vektor, zůstane LZ.
   ii. Přidáme-li do LZ souboru vektor, zůstane LZ.
   iii. 1-členný soubor je LN, právě když obsahuje nenulový vektor.
   iv. Soubor obsahující nulový vektor je LZ.

2. (a) Definujte soubor generátorů a bázi.

   (b) Vyslovte větu o výběru báze ze souboru generátorů.

   (c) Vyslovte větu o doplnění souboru na bázi.

3. (a) Definujte doplněk podprostoru ve vektorovém prostoru konečné dimenze.

   (b) Existuje vždy?

   - Pokud ano, popište konstrukci.
   - Pokud ne, uveďte protipříklad.

   (c) Je doplněk určen jednoznačně? Vysvětlete.

   (d) Je dimenze doplňku určena jednoznačně? Vysvětlete.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.

2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.