Zkoušková písemka LAZ 8.2.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z, u \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha^2 x & + & \alpha y & - & \alpha^2 z & + & u & = & \alpha \\ (\alpha^2+\alpha)x & - & \alpha y & + & \alpha^2 z & & & = & 1 \end{array}.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více než jedno řešení.

   (c) Ve všech případech, kdy soustava má řešení, alespoň jedno řešení spočtěte.

2. Nechť $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$. Najděte

   (a) bázi P, která obsahuje vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) bázi P, která obsahuje vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   (c) doplněk P do $\mathbb{R}^4$.

3. Najděte $(3\vec{x} - 2\vec{y})_\mathcal{X}$, je-li:

   (a) $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ báze $\mathbb{R}^3$ a $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

   (b) $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_3, \vec{x}_3)$ báze $\mathbb{R}^3$ a $\vec{x} = \vec{x}_1 - 3\vec{x}_3$ a $(\vec{y})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

5. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$ a pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\varphi(\vec{x}) = 3x_1 - 3x_3.$$

   Najděte

   (a) $h(\varphi)$ a $d(\varphi)$,

   (b) ker φ,

   (c) ${}^\mathcal{X}\varphi^\mathcal{E}$, kde $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^3$ z 3. příkladu (a) a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}$,

   (d) množinu všech řešení $\varphi(\vec{x}) = -1$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte souřadnici.
   (b) Definujte i-tý souřadnicový funkcionál v bázi.
   (c) Dokažte aditivitu i-tého souřadnicového funkcionálu v bázi.

2. (a) Vyslovte 2. větu o dimenzi.
   (b) Definujte izomorfní zobrazení (všechny 3 vlastnosti vysvětlete).
   (c) Odvoďte z 2. věty o dimenzi a definice izormofismu, že je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, kde P, Q mají konečnou dimenzi, pak $\dim P = \dim Q$.

3. Najděte lineární zobrazení A s následujícími vlastnostmi:
   (a) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a A epimorfní,
   (b) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ a A monomorfní,
   (c) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}^2)$.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.