Zkoušková písemka LAZ 6.2.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$. $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi P a rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in P$.

2. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ jsou báze $\mathbb{R}^4$.

   (a) Najděte $(\vec{x}_2 + \vec{y}_3)_\mathcal{X}$. (b) Je-li $(\vec{z})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, najděte $(\vec{z})_\mathcal{X}$.

   (c) Doplňte $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ na bázi $\mathbb{R}^4$. (d) Doplňte $(\vec{x}_3, \vec{x}_4, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ na bázi $\mathbb{R}^4$.

3. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, kde ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Určete $h(A)$, $d(A)$.
   (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.
   (c) Najděte $\ker A$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = [\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}]_\lambda, Q = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Nechť ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Najděte

   (a) $h(AB)$ a $d(AB)$ a $\ker AB$,

(b) $h(BA)$ a $d(BA)$ a ker BA.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Může být v lineárně nezávislém souboru nějaký vektor lineární kombinací ostatních? Vysvětlete.
   (b) Vyslovte tvrzení o LN 1-členného souboru.
   (c) Vyslovte větu o doplnění LN souboru na bázi.
2. (a) Definujte vektorový prostor. (Axiomy vyjmenovávat nemusíte.)
   (b) Může mít vektorový prostor konečně mnoho prvků? Pokud ano, uveďte konkrétní příklad.
   (c) Může mít vektorový prostor nekonečně mnoho prvků? Pokud ano, uveďte konkrétní příklad.
3. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.
   (b) Co platí pro matici součtu zobrazení v bázích a co platí pro matici násobku zobrazení číslem z tělesa v bázích?
   (c) Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\mathcal{X}, \mathcal{V}$ báze P a $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ báze Q a znáte-li ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, jak najdete ${}^{\mathcal{V}}A^{\mathcal{Z}}$?

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.