

**Praxe** (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť  $P \subset \subset \mathbb{R}^4$ . V závislosti na parametru  $\alpha \in \mathbb{R}$  určete dimenzi  $P$  a pro  $\alpha = 0$  najděte dva různé doplňky  $P$  do  $\mathbb{R}^4$ .

$$P = \left[ \left( \begin{array}{c} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ -\alpha \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ \alpha^2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \right]_{\lambda}$$

2. Nechť  $\mathcal{E}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  je standardní báze  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{X} = (\vec{e}_1, -\vec{e}_3, \vec{e}_2)$  a  $\mathcal{Y} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_3)$  jsou báze  $\mathbb{R}^3$ . Dále nechtě  $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ .

(a) Najděte  $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ , je-li  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

(b) Nechtě  $(\vec{z})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Najděte  $\vec{z}$ .

(c) Vysvětlete podle definice lineární závislosti, zde soubor  $(\vec{x}, \vec{z}, \vec{e}_2)$  je lineárně závislý.

3. Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ , kde pro každé  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  platí

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Určete  $h(A)$ ,  $d(A)$ .

(b) Doplňte  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  na bázi  $A(\mathbb{R}^2)$ .

(c) Najděte bázi  $\ker A$ .

(d) Je  $A$  prosté? Vysvětlete.

4. Nechť  $P \subset \subset \mathbb{R}^3, Q \subset \subset \mathbb{R}^3$ . Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů  $P + Q$  a  $P \cap Q$ , je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_2 - x_3 = 0 \right\}, Q = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

5. Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ . Nechtě  ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , kde  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

je báze  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathcal{E}_3$  je standardní báze  $\mathbb{R}^3$ . Najděte

(a)  $h(A)$  a  $d(A)$ ,

(b)  ${}^{\mathcal{E}_3}A$ ,

(c)  $\ker A$ ,

(d) množinu všech řešení  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Teorie** (za každý okruh maximálně 3 body)  
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

- Definujte bázi.
  - Definujte dimenzi (konečnou, nekonečnou, nulovou).
  - Definujte souřadnice vektoru v bázi.
- Definujte doplněk podprostoru.
  - Je doplněk určen jednoznačně? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad.
  - Vyslovte větu, ze které plyne, že dimenze doplňku je určena jednoznačně.
- Definujte lineární funkcionál.
  - Definujte hodnot lineárního funkcionálu.
  - Jakých hodnot může hodnota lineárního funkcionálu nabývat a proč?
  - Definujte jádro a defekt lineárního funkcionálu.
  - Jakých hodnot může nabývat defekt lineárního funkcionálu a proč?

## Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

- Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
- Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
- Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
- Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
- Kdo získá  $\geq 19$  bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.