Zkoušková písemka LAZ 1.2.2012 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi P a najděte jeho doplněk do $\mathbb{C}^4$.
$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

2. Nechť $\mathcal{E}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = (\vec{e}_1, -\vec{e}_3, \vec{e}_2)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{Y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_3)$ je báze $\mathbb{R}^3$, kde $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$. Dále nechť $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Najděte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   (b) Nechť $(\vec{z})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Najděte $\vec{z}$.
   (c) Vysvětlete podle definice lineární závislosti, zde soubor $(\vec{x}, \vec{z}, \vec{x}_2)$ je lineárně závislý.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Určete $h(A)$, $d(A)$.
   (b) Doplňte $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ na bázi $A(\mathbb{R}^2)$.
   (c) Najděte bázi $\ker A$.
   (d) Je A prosté? Vysvětlete.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li
$$P = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_2 + x_3 = 0 \}, Q = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \}.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$. Připomínáme, že ${}^{\mathcal{X}}A = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$. Najděte
   (a) $h(A)$ a $d(A)$,
   (b) ${}^{\mathcal{E}_3}A$,
   (c) $\ker A$,
   (d) množinu všech řešení $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte bázi.
   (b) Definujte dimenzi (konečnou, nekonečnou, nulovou).
   (c) Dokažte, že souřadnice vektoru v libovolné bázi jsou určeny jednoznačně.

2. (a) Definujte podprostor.
   (b) Z následujících tvrzení vyberte pravdivá, vysvětlete, proč platí, a nepravdivá vyvraťte protipříkladem. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V nad T.
      i. Nechť $P \subset\subset V$, P obsahuje vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Pak $P \subset\subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
      ii. Nechť $P \subset\subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Pak P obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.
      iii. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in P$ a $P \subset\subset V$. Pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset\subset P$.

3. (a) Definujte lineární operátor. (Vysvětlete pojem operátor i pojem lineární.)
   (b) Vyslovte větu, která říká, jak jednodušším způsobem zjistíme, zda je operátor izomorfní.
   (c) Uveďte příklad operátoru, který není monomorfní.
   (d) Uveďte příklad operátoru, který není epimorfní.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.