Klasická kryptologie: Historické šifry

Ľubomíra Balková

Úvod do kryptologie

18. únor 2010

Obsah

1. Základní pojmy
2. Formální definice kryptosystému
3. Druhy šifer
4. Substituce
5. Příklady monoalfabetických substitucí
6. Kryptoanalýza monoalfabetické substituce
7. Příklady polyalfabetických substitucí
8. Kryptoanalýza polyalfabetické šifry
9. Kryptoanalýza mono- i polyalfabetické šifry
10. Transpozice
11. Příklady transpozic

Klasická kryptografie

- končí 2. světovou válkou a nástupem počítačů
- praxe: rozluštění Enigmy polskými kryptoanalytiky počátkem roku 1933 a stavba prvního počítače v Bletchley Parku
- teorie: americký matematik Claude Shannon a jeho práce ze 40. let

kryptografie	x	steganografie
nauka o utajování obsahu komunikace		nauka o utajování komunikace

kryptografie	x	steganografie
nauka o utajování obsahu komunikace		nauka o utajování komunikace

- Kahnova encyklopedická kniha The Codebreakers z roku 1967 ustálila dnešní použití

kryptologie

kryptografie	&	*kryptoanalýza*
navrhování šifrovacích systémů		odhalování slabin šifrovacích systémů

kryptografie	x	steganografie
nauka o utajování obsahu komunikace		nauka o utajování komunikace

- Kahnova encyklopedická kniha The Codebreakers z roku 1967 ustálila dnešní použití

kryptologie

kryptografie	&	*kryptoanalýza*
navrhování šifrovacích systémů		odhalování slabin šifrovacích systémů

- *kódy* = nahrazování skupin slov či vět vyhrazenými slovy či větami (*kódové knihy* = seznamy slov či vět otevřeného textu a odpovídajících šifrových textů)

Definice pojmů

- $\mathcal{M}$ = konečná množina otevřených textů (message space)
- $\mathcal{C}$ = konečná množina šifrových textů (ciphertext space)
- $\mathcal{K}$ = konečná množina klíčů (keyspace)
- *šifrovací transformace* = bijekce $E_e : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, kde $e \in \mathcal{K}$
- *dešifrovací transformace* = bijekce $D_d : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, kde $d \in \mathcal{K}$

Definice pojmů

- $\mathcal{M}$ = konečná množina otevřených textů (message space)
- $\mathcal{C}$ = konečná množina šifrových textů (ciphertext space)
- $\mathcal{K}$ = konečná množina klíčů (keyspace)
- *šifrovací transformace* = bijekce $E_e : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, kde $e \in \mathcal{K}$
- *dešifrovací transformace* = bijekce $D_d : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, kde $d \in \mathcal{K}$

Pozn.

existuje i obecnější definice, kdy šifrovací transformace nemusí být funkce, při šifrování možnost volby, ale dešifrovací transformace už funkce je (dešifrování musí být jednoznačné), takovým příkladem je homofonní substituce

Definice pojmů

- $\mathcal{M}$ = konečná množina otevřených textů (message space)
- $\mathcal{C}$ = konečná množina šifrových textů (ciphertext space)
- $\mathcal{K}$ = konečná množina klíčů (keyspace)
- *šifrovací transformace* = bijekce $E_e : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, kde $e \in \mathcal{K}$
- *dešifrovací transformace* = bijekce $D_d : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, kde $d \in \mathcal{K}$

Pozn.

existuje i obecnější definice, kdy šifrovací transformace nemusí být funkce, při šifrování možnost volby, ale dešifrovací transformace už funkce je (dešifrování musí být jednoznačné), takovým příkladem je homofonní substituce

konvence: otevreny text $\to$ SIFROVY TEXT

Definice kryptosystému

Definice

Kryptosystém (šifra) je dvojice množin $\{E_e \mid e \in \mathcal{K}\}$ *a* $\{E_e^{-1} \mid e \in \mathcal{K}\} = \{D_d \mid d \in \mathcal{K}\}$ *taková, že pro* $(\forall e \in \mathcal{K})\ (\exists_1 d \in \mathcal{K})\ (\forall m \in \mathcal{M})\ (D_d(E_e(m)) = m)$.

Definice kryptosystému

Definice

Kryptosystém (šifra) je dvojice množin $\{E_e \mid e \in \mathcal{K}\}$ *a* $\{E_e^{-1} \mid e \in \mathcal{K}\} = \{D_d \mid d \in \mathcal{K}\}$ *taková, že pro* $(\forall e \in \mathcal{K})\ (\exists_1 d \in \mathcal{K})\ (\forall m \in \mathcal{M})\ (D_d(E_e(m)) = m)$.

$(e, d) =$ *pár klíčů* (keypair)

- na principu *confusion* (směšování): zastírá závislost mezi m a c záměnou znaků (substituce)
- na principu *diffusion* (rozptyl): rozprostře info obsažené v m po celé šifře pomocí permutace (transpozice)

- na principu *confusion* (směšování): zastírá závislost mezi m a c záměnou znaků (substituce)
- na principu *diffusion* (rozptyl): rozprostře info obsažené v m po celé šifře pomocí permutace (transpozice)
- *homofonní*: každému šifrovému symbolu odpovídá jediný symbol otevřeného textu (nemusí to být naopak)
- *polyfonní*: některým symbolům šifrového textu odpovídá několik symbolů otevřeného textu (typicky ≤ 3)

- na principu *confusion* (směšování): zastírá závislost mezi m a c záměnou znaků (substituce)
- na principu *diffusion* (rozptyl): rozprostře info obsažené v m po celé šifře pomocí permutace (transpozice)
- *homofonní*: každému šifrovému symbolu odpovídá jediný symbol otevřeného textu (nemusí to být naopak)
- *polyfonní*: některým symbolům šifrového textu odpovídá několik symbolů otevřeného textu (typicky ≤ 3)
- *šifry se symetrickým klíčem* (symmetric-key ciphers, one-key, single-key, conventional): pro každý pár klíčů (e, d) výpočetně snadné určit e ze znalosti d a naopak, často: $e = d$, odtud název

- na principu *confusion* (směšování): zastírá závislost mezi m a c záměnou znaků (substituce)
- na principu *diffusion* (rozptyl): rozprostře info obsažené v m po celé šifře pomocí permutace (transpozice)
- *homofonní*: každému šifrovému symbolu odpovídá jediný symbol otevřeného textu (nemusí to být naopak)
- *polyfonní*: některým symbolům šifrového textu odpovídá několik symbolů otevřeného textu (typicky ≤ 3)
- *šifry se symetrickým klíčem* (symmetric-key ciphers, one-key, single-key, conventional): pro každý pár klíčů (e, d) výpočetně snadné určit e ze znalosti d a naopak, často: $e = d$, odtud název
- *blokové*: otevřený text se rozdělí do bloků (strings) pevné délky a ty se šifrují stejným klíčem
- *proudové*: *keystream* (proudový klíč) dán klíčem vstupním a nezávislý na m se sčítá s m bit po bitu

Bloková šifra se symetrickým klíčem.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ *je abeceda,* $|\mathcal{A}| = n$*.* $\mathcal{M}$ *je množina slov délky* r *nad* $\mathcal{A}$*. Blokovou šifru s bloky délky* r *a prostorem klíčů*

$$\mathcal{K} = \{e = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) | \sigma_i \textit{ permutace na } \mathcal{A}\}$$

nazveme jednoduchou substitucí, *pokud pro každé* $m = (m_1, m_2, \dots, m_r) \in \mathcal{M}$ *a každé* $e \in \mathcal{K}$ *platí*

$$E_e(m) = (\sigma_1(m_1), \sigma_2(m_2), \dots, \sigma_r(m_r)) = c$$

$$D_d(c) = (\sigma_1^{-1}(c_1), \sigma_2^{-1}(c_2), \dots, \sigma_r^{-1}(c_r)) = m.$$

Bloková šifra se symetrickým klíčem.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ *je abeceda,* $|\mathcal{A}| = n$*.* $\mathcal{M}$ *je množina slov délky* r *nad* $\mathcal{A}$*. Blokovou šifru s bloky délky* r *a prostorem klíčů*

$$\mathcal{K} = \{e = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) | \sigma_i \text{ permutace na } \mathcal{A}\}$$

nazveme jednoduchou substitucí, *pokud pro každé* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathcal{M}$ *a každé* $e \in \mathcal{K}$ *platí*

$$E_e(m) = (\sigma_1(m_1), \sigma_2(m_2), \ldots, \sigma_r(m_r)) = c$$

$$D_d(c) = (\sigma_1^{-1}(c_1), \sigma_2^{-1}(c_2), \ldots, \sigma_r^{-1}(c_r)) = m.$$

Počet možných klíčů $|\mathcal{K}| = (n!)^r$.

Bloková šifra se symetrickým klíčem.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je abeceda, $|\mathcal{A}| = n$. $\mathcal{M}$ je množina slov délky r nad $\mathcal{A}$. Blokovou šifru s bloky délky r a prostorem klíčů

$$\mathcal{K} = \{e = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) | \sigma_i \text{ permutace na } \mathcal{A}\}$$

nazveme jednoduchou substitucí, *pokud pro každé $m = (m_1, m_2, \dots, m_r) \in \mathcal{M}$ a každé $e \in \mathcal{K}$ platí*

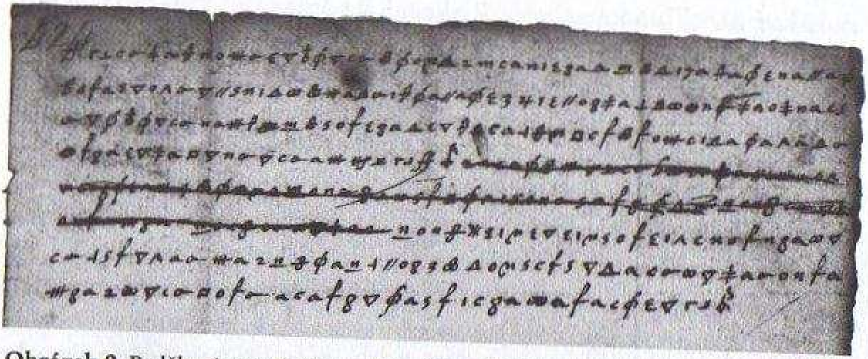
$$E_e(m) = (\sigma_1(m_1), \sigma_2(m_2), \dots, \sigma_r(m_r)) = c$$

$$D_d(c) = (\sigma_1^{-1}(c_1), \sigma_2^{-1}(c_2), \dots, \sigma_r^{-1}(c_r)) = m.$$

Počet možných klíčů $|\mathcal{K}| = (n!)^r$.

1. pro $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_r$ jde o *monoalfabetickou* substituci (šifrovací tabulka má jen 2 řádky)
2. jinak *polyalfabetickou*

Šifra Marie Stuartovny



Obrázek 9: Padělané postskriptum, které doplnil Thomas Phelippes k Mariině zprávě, jež byla dešifrována pomocí nomenklátoru Marie Stuartovny (viz obrázek 8).

Příklad

Pomocí Caesarovy šifry rozluštěte citát, který Caesar vyslovil při překročení řeky Rubikon určující hranici mezi Galií a Itálií. Vyhlašoval tím obrazně válku Římu, protože jeho moc byla v té době omezena na Galii (prokonzul).

$$W, K, H \quad G, L, H \quad L, V \quad F, D, V, W$$

Příklad

Pomocí Caesarovy šifry rozluštěte citát, který Caesar vyslovil při překročení řeky Rubikon určující hranici mezi Galií a Itálií. Vyhlašoval tím obrazně válku Římu, protože jeho moc byla v té době omezena na Galii (prokonzul).

$$W, K, H \quad G, L, H \quad L, V \quad F, D, V, W$$
$$c : 22, 10, 7 \; 6, 11, 7 \; 11, 21 \; 5, 3, 21, 22$$
$$m : 19, 7, 4 \; 3, 8, 4 \; 8, 18 \; 2, 0, 18, 19$$

Řešení: The die is cast. = *Kostky jsou vrženy.*

Posuvné šifry (shift ciphers)

- nejznámější je *Caesarova šifra*

Posuvné šifry (shift ciphers)

- nejznámější je *Caesarova šifra*
- **Algoritmus**: $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, 25\}^*$, $E_e(m_j) := m_j + b \mod 26$ pro $e = b$ a $D_d(c_j) := c_j - b \mod 26$

Posuvné šifry (shift ciphers)

- nejznámější je *Caesarova šifra*
- **Algoritmus**: $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, 25\}^*$, $E_e(m_j) := m_j + b \mod 26$ pro $e = b$ a $D_d(c_j) := c_j - b \mod 26$
- šifra se symetrickým klíčem $e = -d = b$, bloková šifra s bloky délky 1

Posuvné šifry (shift ciphers)

- nejznámější je *Caesarova šifra*
- **Algoritmus**: $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \dots, 25\}^*$, $E_e(m_j) := m_j + b \mod 26$ pro $e = b$ a $D_d(c_j) := c_j - b \mod 26$
- šifra se symetrickým klíčem $e = -d = b$, bloková šifra s bloky délky 1
- **Kryptoanalýza**: posuvné šifry lehce rozluštitelné, stačí vyzkoušet jen $\#\mathcal{A}$ možností

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$,

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$, to je splněno, právě když nsd(a,n)=1

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$, to je splněno, právě když nsd(a,n)=1
- takových a je $\phi(n)$, proto pro pevné n existuje $n\phi(n)$ afinních šifer

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$, to je splněno, právě když nsd(a,n)=1
- takových a je $\phi(n)$, proto pro pevné n existuje $n\phi(n)$ afinních šifer
- posuvné jsou speciálním případem

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \dots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$, to je splněno, právě když nsd(a,n)=1
- takových a je $\phi(n)$, proto pro pevné n existuje $n\phi(n)$ afinních šifer
- posuvné jsou speciálním případem
- šifra se symetrickým klíčem $d = (a^{-1}, -b)$, bloková šifra s bloky délky 1

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$, to je splněno, právě když nsd(a,n)=1
- takových a je $\phi(n)$, proto pro pevné n existuje $n\phi(n)$ afinních šifer
- posuvné jsou speciálním případem
- šifra se symetrickým klíčem $d = (a^{-1}, -b)$, bloková šifra s bloky délky 1

Příklad

$n = 26$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}/_{26\mathbb{Z}}$, $e = (7, 5)$, *pak* $E_e(m_j) = 7m_j + 5 \mod 26 = c_j$,

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \dots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$, to je splněno, právě když nsd(a,n)=1
- takových a je $\phi(n)$, proto pro pevné n existuje $n\phi(n)$ afinních šifer
- posuvné jsou speciálním případem
- šifra se symetrickým klíčem $d = (a^{-1}, -b)$, bloková šifra s bloky délky 1

Příklad

$n = 26$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}/_{26\mathbb{Z}}$, $e = (7, 5)$, pak $E_e(m_j) = 7m_j + 5 \mod 26 = c_j$, a tedy $D_d(c_j) = 15(c_j - 5) \mod 26 = m_j$. Dešifrujte text $c = 19, 20, 17, 6, 8, 5, 18, 5, 4, 17, 1, 8$.

Afinní šifry (affine ciphers)

- **Algoritmus**: nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1, \dots, n-1\}^*$, $E_e(m_j) := am_j + b \mod n$ pro $e = (a, b)$, aby existovala $E_e^{-1}(c_j) = a^{-1}(c_j - b) \mod n$, musí existovat $a^{-1} \mod n$, to je splněno, právě když nsd(a,n)=1
- takových a je $\phi(n)$, proto pro pevné n existuje $n\phi(n)$ afinních šifer
- posuvné jsou speciálním případem
- šifra se symetrickým klíčem $d = (a^{-1}, -b)$, bloková šifra s bloky délky 1

Příklad

$n = 26$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}/_{26\mathbb{Z}}$, $e = (7, 5)$, pak $E_e(m_j) = 7m_j + 5 \mod 26 = c_j$, a tedy $D_d(c_j) = 15(c_j - 5) \mod 26 = m_j$. Dešifrujte text $c = 19, 20, 17, 6, 8, 5, 18, 5, 4, 17, 1, 8$.

$$m = 2, 17, 24, 15, 19, 0, 13, 0, 11, 24, 18, 19$$

Řešení: cryptanalyst.

Substituce s klíčovým slovem

Plain	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Cipher	J	U	L	I	S	C	A	E	R	B	D	F	G
Plain	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Cipher	H	K	M	N	O	P	Q	T	V	W	X	Y	Z

Polybiův čtverec, šachovnice

- **Algoritmus**: $E_e : \mathcal{A}^* \to (\hat{5} \times \hat{5})^*$, tedy písmenům anglické abecedy přiřazuje dvojice čísel od 1 do 5

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2	f	g	h	i/j	k
3	l	m	n	o	p
4	q	r	s	t	u
5	v	w	x	y	z

Příklad

Pomocí Polybiova čtverce dešifrujte citát přiřazený Augustovi v Životě 12 císařů od římského historika Suetonia (70-140 n.l.)

$$c = 32112515 \ 2311434415 \ 433134523154$$

Polybiův čtverec, šachovnice

- **Algoritmus**: $E_e : \mathcal{A}^* \to (\hat{5} \times \hat{5})^*$, tedy písmenům anglické abecedy přiřazuje dvojice čísel od 1 do 5

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2	f	g	h	i/j	k
3	l	m	n	o	p
4	q	r	s	t	u
5	v	w	x	y	z

Příklad

Pomocí Polybiova čtverce dešifrujte citát přiřazený Augustovi v Životě 12 císařů od římského historika Suetonia (70-140 n.l.)

$$c = 32112515\ 2311434415\ 433134523154$$
$$m = \textit{Make haste slowly.} = \textit{Spěchej pomalu.}$$

Playfairova šifra

- **Algoritmus**: bigramová šifra, zašifruje pomocí tabulky

C	H	A	R	L
E	S	B	D	F
G	I/J	K	M	N
O	P	Q	T	U
V	W	X	Y	Z

$+$ úprav otevřeného textu:

mm $\to$ mzm,

lichá délka textu $\to$ na konec se přidá z

  - SF $\to$ BE (náhrada sousedními znaky vpravo)
  - SI $\to$ IP (náhrada sousedními znaky dole)
  - VU $\to$ ZO, KE $\to$ GB (diagonální řádková náhrada)

Příklad

Dešifrujte text pomocí klíčového slova Charles

$$c = ETGUUYYDPFUYPRDG$$

Playfairova šifra

- **Algoritmus**: bigramová šifra, zašifruje pomocí tabulky

C	H	A	R	L
E	S	B	D	F
G	I/J	K	M	N
O	P	Q	T	U
V	W	X	Y	Z

$+$ úprav otevřeného textu:

mm → mzm,

lichá délka textu → na konec se přidá z

  - SF → BE (náhrada sousedními znaky vpravo)
  - SI → IP (náhrada sousedními znaky dole)
  - VU → ZO, KE → GB (diagonální řádková náhrada)

Příklad

Dešifrujte text pomocí klíčového slova Charles

$$c = ETGUUYYDPFUYPRDG$$

$$m = donotztrustzthem$$

Hillova šifra

- **Algoritmus**: šifruje r-gramy na r-gramy, dáno $n, r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = \{e \in (\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})^{r\times r} | \exists e^{-1} \mod n\}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = (\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})^r$, pro $\forall m \in \mathcal{M}$ definujeme $E_e(m) = m \cdot e$ a $D_d(c) = c \cdot e^{-1}$
- platí, že e^{-1} existuje $\Leftrightarrow$ nsd$(\det(e), n) = 1$

Příklad

$r = 2$, $n = 26$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = (\mathbb{Z}/_{26\mathbb{Z}})^2$, $\mathcal{K} =$ *všechny invertibilní matice* 2×2, *tj.* $e \in \mathcal{K} \Leftrightarrow nsd(\det(e), 26) = 1$. *Vezměme* $e = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, *jelikož* $\det(e) = 9$, *může hrát roli klíče. Zašifrujte text movie.*

Hillova šifra

- **Algoritmus**: šifruje r-gramy na r-gramy, dáno $n, r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = \{e \in (\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})^{r\times r} | \exists e^{-1} \mod n\}$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = (\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})^r$, pro $\forall m \in \mathcal{M}$ definujeme $E_e(m) = m \cdot e$ a $D_d(c) = c \cdot e^{-1}$
- platí, že e^{-1} existuje $\Leftrightarrow$ nsd$(\det(e), n) = 1$

Příklad

$r = 2$, $n = 26$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = (\mathbb{Z}/_{26\mathbb{Z}})^2$, $\mathcal{K} =$ všechny invertibilní matice 2×2, tj. $e \in \mathcal{K} \Leftrightarrow nsd(\det(e), 26) = 1$. Vezměme $e = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, jelikož $\det(e) = 9$, může hrát roli klíče. Zašifrujte text movie.

$$m = 12, 14, 21, 8, 4, 25$$

$$E_e(12, 14) = (12, 14) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \mod 26 = (24, 12) \ \textit{atd.}$$

$$c = 24, 12, 19, 10, 11, 19$$

Šifrový text je tedy YMTKLT. K dešifrování je třeba znát $e^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 23 & 9 \end{pmatrix}$.

Relativní četnosti písmen v angličtině

a	b	c	d	e	f	g	h	i
8.167	1.492	2.782	4.253	12.702	2.228	2.015	6.094	6.966
j	k	l	m	n	o	p	q	r
0.153	0.772	4.025	2.406	6.749	7.507	1.929	0.095	5.987
s	t	u	v	w	x	y	z	
6.327	9.056	2.758	0.978	2.360	0.150	1.974	0.074	

Pořadí od nejčastějšího k nejméně častému písmenu

etaonirshdlucmpfywgbvjkqxz D.Kahn, 1967

etaonrishdlfcmugpywbvkxjqz A.G. Konheim, 1981

Frekvenční analýza

Příklad

Pomocí frekvenční analýzy a nápovědy, že šifrová tabulka obsahuje klíčové slovo, prolomte:
E GEQUSGEQLDLEH LN E OSVLDS PIM QTMHLHA DIPPSS LHQI QUSIMSGN.

Frekvenční analýza

Příklad

Pomocí frekvenční analýzy a nápovědy, že šifrová tabulka obsahuje klíčové slovo, prolomte:
E GEQUSGEQLDLEH LN E OSVLDS PIM QTMHLHA DIPPSS LHQI QUSIMSGN.

Frekvenční analýza není všemocná, obecně funguje až pro texty s aspoň stovkou slov.

Frekvenční analýza

Příklad

Pomocí frekvenční analýzy a nápovědy, že šifrová tabulka obsahuje klíčové slovo, prolomte:
E GEQUSGEQLDLEH LN E OSVLDS PIM QTMHLHA DIPPSS LHQI QUSIMSGN.

Frekvenční analýza není všemocná, obecně funguje až pro texty s aspoň stovkou slov. “From Zanzibar to Zambia and Zaire, ozone zones make zebras run zany zigzags.”

Vylepšení monoalfabetické substituce

- *klamače (nuly)* = šifrování pomocí širší abecedy (např. 0 až 99), mnoho z písmen nemá význam
- komolení pravopisu
- kombinace s kódovými slovy = *nomenklátory*

Homofonní substituce

Kompromis mezi monoalfabetickou a polyalfabetickou substitucí

- písmenu odpovídá takové procento znaků šifrové abecedy, kolik je frekvence písmene ⇒ znemožnění frekvenční analýzy
- **Kryptoanalýza**: lze vyjít ze vztahů mezi písmeny v anglických textech, např. za q následuje vždy u, q je reprezentováno jediným symbolem a u třemi symboly, najdeme tedy písmeno, za nímž se vyskytují jen tři další a máme pravděpodobně q a u

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
09	48	13	01	14	10	06	23	32	15	04	26	22	18	00	38	94	29	11	17	08	34	60	28	21	02
12	81	41	03	16	31	25	39	70			37	27	58	05	95		35	19	20	61		89		52	
33		62	45	24			50	73			51		59	07			40	36	30	63					
47			79	44			56	83			84		66	54			42	76	43						
53				46			65	88					71	72			77	86	49						
67				55			68	93					91	90			80	96	69						
78				57										99					75						
92				64															85						
				74															97						
				82																					
				87																					

Albertiho šifrovací disk

Alberti jako první použil kódovou knihu, číslům 11 až 4444 přiřadil věty, např. číslu 21 odpovídala věta: Poslat v plucích, příjemci pak poslal zprávu: Poslat v plucích & P + otevřený text

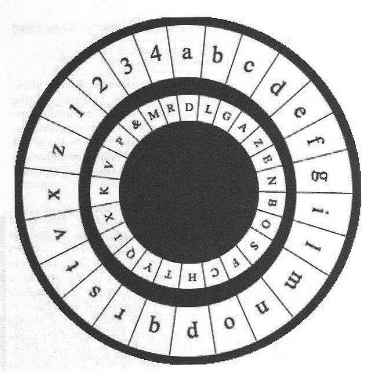


Figure 2.1: Alberti disk.

Vigenèrova šifra - Chiffre indéchiffrable

Nejčastější varianty:

1. periodický klíč - opakující se slovo
2. smysluplný klíč - text, který nesouvisí s otevřeným textem nebo kombinace *priming key* a otevřeného textu (autokláv otevř. text)
3. klíč = kombinace *priming key* a šifrového textu (autokláv šifrtext)
4. náhodný klíč $\Rightarrow$ Vernamova šifra (Shannon)

Vigenèrova šifra - Chiffre indéchiffrable

Nejčastější varianty:

1. periodický klíč - opakující se slovo
2. smysluplný klíč - text, který nesouvisí s otevřeným textem nebo kombinace *priming key* a otevřeného textu (autokláv otevř. text)
3. klíč = kombinace *priming key* a šifrového textu (autokláv šifrtext)
4. náhodný klíč $\Rightarrow$ Vernamova šifra (Shannon)

Příklad

Dešifrujte Vigenèrovu šifru s periodickým klíčem period.
ELZTCVDTYG WV PKRUS ZXXY WPMTGKQJHH EEL BR GYCMG

Dešifrujte Vigenèrovu šifru s priming key plain.
BLTPRYALPGE IL IISUW WOTT VQTXZ RHO RG OOMRQHJEIU

Beaufortova šifra

- varianta Vigenèrovy šifry s periodickým klíčem
- **Algoritmus**: stejná šifrovací i dešifrovací funkce, tj. inverzní sama k sobě $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_r) \in \mathcal{K}$, $E_e(m_j) = e_{j \bmod r} - m_j \mod n$

Příklad

Dešifrujte Beaufortovu šifru s periodickým klíčem period.
1,19,14 22,14,10,8,0,5,8,21,21,13,22,17,21,22 16,11,9,13,17 11,21,11. 11,10,4,6,12 23,6,25,15,10,17,23 21,23,16,21 2,11,2,3,22,10 9,2,12,3,23,19,3,14,19,13.

Vigenèrova šifra s periodickým klíčem

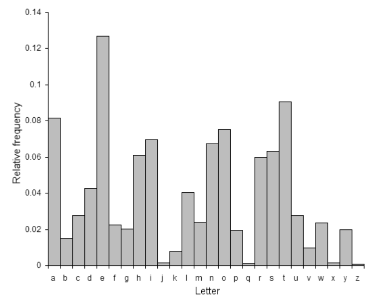
- *Kasiského test* = hledání opakujících se bloků v šifrovém textu, které zřejmě vznikly zašifrováním opakujících se úseků otevřeného textu stejným úsekem klíče, $l =$nsd(vzdálenosti opakujících se úseků) a to je pravděpodobná délka klíče

Vigenèrova šifra s periodickým klíčem

- *Kasiského test* = hledání opakujících se bloků v šifrovém textu, které zřejmě vznikly zašifrováním opakujících se úseků otevřeného textu stejným úsekem klíče, l =nsd(vzdálenosti opakujících se úseků) a to je pravděpodobná délka klíče
- sepsání šifrového textu do tabulky o l sloupcích a v každém z nich provedení frekvenční analýzy

Vigenèrova šifra s periodickým klíčem

- *Kasiského test* = hledání opakujících se bloků v šifrovém textu, které zřejmě vznikly zašifrováním opakujících se úseků otevřeného textu stejným úsekem klíče, l =nsd(vzdálenosti opakujících se úseků) a to je pravděpodobná délka klíče
- sepsání šifrového textu do tabulky o l sloupcích a v každém z nich provedení frekvenční analýzy



Vigenèrova šifra se smysluplným klíčem

- v otevřeném textu předpokládáme výskyt častých slov (např. the), správně umístěným častým slovům bude odpovídat smysluplný úsek klíče
- nalezený úsek klíče hádáním rozšíříme a najdeme odpovídající nové úseky otevřeného textu

Příklad

Prolomte VHRMHEUZNFQDEZRWXFIDK.

Index koincidence (shody)

Definice

IC je pravděpodobnost, že se u 2 textů v daném jazyce vyskytnou na stejném místě stejná písmena.

Index koincidence (shody)

Definice

IC je pravděpodobnost, že se u 2 textů v daném jazyce vyskytnou na stejném místě stejná písmena.

Indexy koincidence

angličtina	$0,0676$
němčina	$0,0824$
francouzština	$0,0801$
ruština	$0,0470$ (32 znaků v abecedě)
čeština	$0,0577$
náhodný text	$1/26 = 0,0385$

Bloková šifra se symetrickým klíčem.

Definice

Bloková šifra s blokem délky r a prostorem klíčů $\mathcal{K} = \{\text{permutace na } \hat{r}\}$ se nazývá jednoduchá transpozice (permutace), *pokud platí pro každé $m = (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathcal{M}$ a pro každé $e \in \mathcal{K}$*

$$E_e(m) = (m_{e(1)}, m_{e(2)}, \ldots, m_{e(r)}) = c$$

$$D_d(c) = D_{e^{-1}}(c) = (c_{d(1)}, c_{d(2)}, \ldots, c_{d(r)}) = m.$$

Bloková šifra se symetrickým klíčem.

Definice

Bloková šifra s blokem délky r a prostorem klíčů $\mathcal{K} = \{permutace\ na\ \hat{r}\}$ se nazývá jednoduchá transpozice (permutace), *pokud platí pro každé* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathcal{M}$ *a pro každé* $e \in \mathcal{K}$

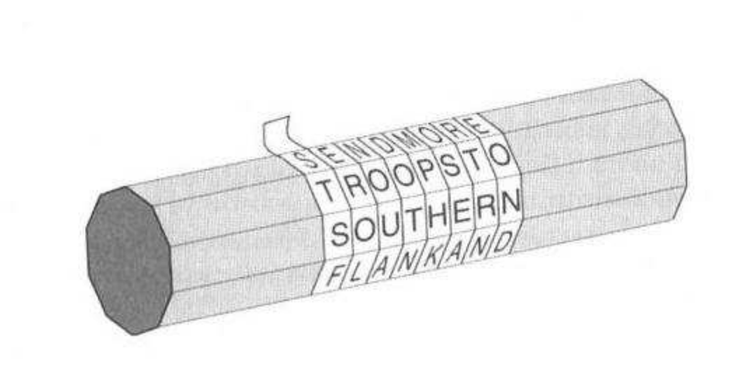
$$E_e(m) = (m_{e(1)}, m_{e(2)}, \ldots, m_{e(r)}) = c$$

$$D_d(c) = D_{e^{-1}}(c) = (c_{d(1)}, c_{d(2)}, \ldots, c_{d(r)}) = m.$$

Počet možných klíčů $|\mathcal{K}| = r!$

Sparťanská transpozice - skytale, scytale

- **Algoritmus**: kožený pásek namotaný na tyči určitého průměru, na nějž se napsal text, pak se pásek sejmul, aby šel přečíst, musel mít příjemce tyč stejného průměru



Jednoduchá transpozice s heslem

- **Algoritmus**:

R	I	F	L	E
5	3	2	4	1
M	I	X	U	J
E	M	I	S	T
A	Z	A	C	H
O	V	A	P	I
S	M	E	N	A

$\longrightarrow$

JTHIA
XIAAE
IMZVM
USCPN
MEAOS

- **Kryptoanalýza**: snadná při znalosti delšího slova otevřeného textu

Příklad

Prolomte, víte-li, že otevř. text obsahuje slovo transpozice.
RRJCMNIKNIIHTPDMPTEIICCYISVHVZNCIAEHIOEA.

Německá ADFGVX

- kombinace substituce a transpozice
- **Algoritmus**:

	A	D	F	G	V	X
A	b	3	m	r	l	i
D	a	6	f	ϕ	8	2
F	c	7	s	e	u	h
G	z	9	d	x	k	v
V	1	q	y	w	5	p
X	n	j	t	4	g	o

$$m = \text{field cipher},$$

$$c = DFAXFGAVGFFAAXVXFXFGAG$$

Německá ADFGVX

- poté šifrový text zapsán do obdélníku s použitím číselného klíče odpovídajícího slovu RIFLE

R	I	F	L	E
5	3	2	4	1
D	F	A	X	F
G	A	V	G	F
F	A	A	X	V
X	F	X	F	G
A	G			

  výsledný šifrový text *FFVGAVAXFAAFGXGXFDGFXA*
- ADFGVX vybrána, protože jejich znaky v Morseově abecedě odlišné $\Rightarrow$ méně překlepů při telegrafování
- polygramová monoalfabetická substitučně-transpoziční šifra

Zlomy v kryptologii

- monoalfabetická substituce (Caesar, Marie Stuartovna, Hill, Polybius, Playfair)

Zlomy v kryptologii

- monoalfabetická substituce (Caesar, Marie Stuartovna, Hill, Polybius, Playfair)
- kryptoanalýza frekvenční analýzou (9. stol. - Arabové)

Zlomy v kryptologii

- monoalfabetická substituce (Caesar, Marie Stuartovna, Hill, Polybius, Playfair)
- kryptoanalýza frekvenční analýzou (9. stol. - Arabové)
- polyalfabetická šifra (Alberti, Vigenère, Beaufort)

Zlomy v kryptologii

- monoalfabetická substituce (Caesar, Marie Stuartovna, Hill, Polybius, Playfair)
- kryptoanalýza frekvenční analýzou (9. stol. - Arabové)
- polyalfabetická šifra (Alberti, Vigenère, Beaufort)
- kryptoanalýza testem periodicity + frekvenční analýzou (1854 - Babbage, 1863 - Kasiski)

Zlomy v kryptologii

- monoalfabetická substituce (Caesar, Marie Stuartovna, Hill, Polybius, Playfair)
- kryptoanalýza frekvenční analýzou (9. stol. - Arabové)
- polyalfabetická šifra (Alberti, Vigenère, Beaufort)
- kryptoanalýza testem periodicity + frekvenční analýzou (1854 - Babbage, 1863 - Kasiski)
- konec 1. svět. války - Vernamova šifra a šifrovací stroje