Zkoušková písemka 30.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující rovnice

$$\alpha x \;+\; \beta y \;+\; \alpha z \;+\; \beta u \;=\; \alpha \;.$$

   [4 body]

2. Spočtěte vše, co lze spočíst bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$:

   (a) $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$,
   (b) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$,
   (c) $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$,
   (d) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$,
   (e) $\mathbb{A}^{T}\mathbb{A}^{-1}$,

   kde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

   [4 body]

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Je podobná matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?
   Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace. Pokud ne, vysvětlete.
   [4 body]

4. Nechť $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$, $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. Následující úlohu řešte nejprve při standardním skalárním součinu a poté při $\mathbb{A}$-skalárním součinu s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Najděte

   (a) $P^\perp$ do $\mathbb{C}^4$,
   (b) ortogonální průmět $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

   [4 body]

5. Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$:

   $W_1 \equiv \; x \;+\; y \;+\; z \;+\; u \;=\; 1 \;, \quad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha$

(a) Určete, o jaké lineární variety se jedná.
(b) Najděte normálové rovnice W_2.
(c) Najděte vzájemnou polohu W_2 a W_1.
(d) Najděte průnik $W_1 \cap K$, kde $K = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}]_\kappa$. Nevíte-li si rady, najděte aspoň průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Uveďte vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou lineárních variet.
   (b) Jaká je vzdálenost dvou lineárních variet s neprázdným průnikem? Vysvětlete.
   (c) Definujte konvexní množinu (vysvětlete pojem použitý v definici).
   (d) Co je průnikem konvexních množin? Dokažte.

   [3 body]

2. (a) Definujte ortogonální doplněk podprostoru vektorového prostoru V se skalárním součinem.
   (b) Uveďte 3 jeho vlastnosti.
   (c) Vysvětlete, co znamená, že V je direktním součtem podprostoru a jeho OG doplňku.
   (d) Definujte OG průmět vektoru do podprostoru a uveďte vzorec pro výpočet OG průmětu.

   [3 body]

3. (a) Definujte hermitovskou matici.
   (b) Uveďte příklad hermitovské matice, která není symetrická.
   (c) Co platí pro vlastní čísla hermitovské matice? Dokažte.
   (d) Je každá hermitovská matice podobná nějaké diagonální matici? Vysvětlete.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.