Zkoušková písemka 28.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha^2 y & & & = & \alpha^3 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ -x & + & y & - & \alpha z & = & 1 \end{array} .$$

   [4 body]

2. (a) Najděte $\mathbb{A}^{-1}$, kde $\mathbb{A}$ je matice soustavy LAR z předchozího příkladu, pro taková α, pro která existuje.
   (b) Pomocí této matice vyřešte předchozí soustavu v případě, kdy má jediné řešení.
   (c) $\mathbb{A}^{-1}_{23}$ najděte pomocí matice adjungované (uveďte obecně vzorec, který používáte).
   (d) Najděte pomocí Cramerova pravidla 2. složku řešení z předchozího příkladu v případě, kdy má soustava jediné řešení.

   [4 body]

3. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Pro taková α najděte regulární matici $\mathbb{X}$ a diagonální matici $\mathbb{D}$ tak, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Nechť $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$.

   Najděte
   (a) $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$,
   (b) ortonormální bázi P,
   (c) ortogonální průmět $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ do P pomocí nalezené ON báze.

   [4 body]

5. Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2, W_3 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}]_\alpha, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda, \quad W_3 \equiv \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & & & & & = & 2 \end{array} .$$

   (a) Určete, o jaké lineární variety se jedná.
   (b) Najděte normálové rovnice W_1.

(c) Najděte vzájemnou polohu W_2 a W_3.

(d) Najděte průnik $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte regulární matici (vysvětlete použitý pojem).
   (b) Vyslovte tři další tvrzení ekvivalentní s tvrzením: $\mathbb{A}$ je regulární matice
      i. pomocí determinantu,
      ii. pomocí vlastních čísel,
      iii. pomocí řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic (toto tvrzení dokažte s využitím Frobeniovy věty)
   (c) Z následujících typů matic vyberte ty, které jsou vždy regulární:
      i. pozitivně definitní,
      ii. unitární,
      iii. horní trojúhelníková,
      iv. v horním stupňovitém tvaru.

      Zdůvodněte.

   [3 body]

2. (a) Vyslovte a dokažte rovnoběžníkovou rovnost.
   (b) Zjistěte a) výpočtem a b) z teorie, zda se pro vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$ nabývá rovnost ve Schwarz-Cauchyově nerovnosti.
   (c) Jaký úhel svírají vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ z $\mathbb{R}^3$?

   [3 body]

3. (a) Definujte pozitivně definitní matici s prvky z $\mathbb{C}$.
   (b) Uveďte 2 kritéria pro rozhodování, zda je matice PD.
   (c) Co je $\mathbb{A}$-skalární součin v $\mathbb{C}^3$? Proč jej zavádíme jen pro PD matice?

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.