Zkoušková písemka 23.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ najděte:

   (a) $\ker A$,

   (b) $A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$,

   kde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

   $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \alpha z \\ -\alpha x + \beta z \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

2. Nechť jsou dány

   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Spočtěte ty z následujících součinů, které mají smysl. A u těch, které smysl nemají, vysvětlete proč.

   $$1)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}^{-1}, \quad 2)\ \mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}, \quad 3)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}, \quad 4)\ \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}, \quad 5)\ (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1}, \quad 6)\ (\mathbb{B}^T\mathbb{A})^{-1}.$$

   [4 body]

3. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte podobnostní transformaci.

   [4 body]

4. Najděte ortonormální bázi $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$

   (a) pomocí Gram-Schmidta,

   (b) jiným způsobem.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně: W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a W_2 je dána normálovými rovnicemi $W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 1. \end{array}$

   Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte normálové rovnice W_1. Určete vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

Teorie

1. (a) Definujte charakteristický polynom.
   (b) Jaký je koeficient u nejvyššího členu a u konstantního členu?
   (c) Jak spočteme vlastní čísla matice pomocí charakteristického polynomu?
   (d) Definujte algebraickou a geometrickou násobnost vlastního čísla.
   (e) Definujte diagonalizovatelnou matici.
   (f) Které z následujících typů matic jsou vždy diagonalizovatelné. U těch, které nejsou, najděte protipříklad.
      i. regulární,
      ii. horní trojúhelníkové,
      iii. diagonální,
      iv. pozitivně definitní.

   [3 body]

2. (a) Rozhodněte, které z následujících matic jsou
      i. hermitovské,
      ii. unitární,
      iii. pozitivně definitní,
      iv. regulární.
   (b) U každé z matic $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ napište, co vše víte o vlastních číslech a vlastních vektorech bez počítání.
   (c) Pro hermitovské matice tvrzení o vlastních vektorech dokažte.

$$a)\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\ \mathbb{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad c)\ \mathbb{C} = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   [3 body]

3. (a) Definujte lineární varietu.
   (b) Je množina řešení soustavy LAR s nenulovou pravou stranou lineární varietou? Vysvětlete.
   (c) Je množina řešení homogenní soustavy LAR lineární varietou? Vysvětlete.
   (d) Jak spočtete vzdálenost bodu od podprostoru? Dokažte.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.