Zkoušková písemka 22.6.2010 Jméno:

Praxe

1. Najděte všechna řešení následující soustavy lineárních algebraických rovnic v závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \\ \beta x & + & y & + & \alpha z & = & \beta \end{array}$$

[4 body]

2. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Zkontrolujte, že $\mathbb{A}$ je regulární.

   (b) Najděte bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$ ty z následujících součinů matic, které mají smysl:

$$1)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}, \quad 2)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}, \quad 3)\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}, \quad 4)\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}.$$

[4 body]

3. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (a) hermitovská?

   (b) symetrická?

   - V případě b) (tedy symetrické matice) napište, co víte o vlastních číslech a diagonalizaci bez počítání.
   - Poté najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

[4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4,\ Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde

$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

   Najděte

   (a) $Q^\perp$ do P (nikoliv $Q^\perp$ do $\mathbb{R}^4$),

   (b) OG průmět vektoru $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ do $Q^\perp$, tj. $\vec{x}_{Q^\perp}$.

[4 body]

5. Jsou dány lineární variety

$$W_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rclcrcr} x & = & 1 & + & t & & \\ y & = & & & t & & \\ z & = & 1 & - & t & + & s \\ u & = & & & & & s \end{array}, \quad W_3 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(a) Určete, o jaké lineární variety se jedná.
(b) Najděte normálové rovnice W_2.
(c) Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2.
(d) Najděte průnik $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte konvexní obal a afinní obal.
   (b) Co je afinní obal 2 LN vektorů a konvexní obal 2 LN vektorů v $\mathbb{R}^3$?
   (c) Co je afinní obal 3 LN vektorů a konvexní obal 3 LN vektorů v $\mathbb{R}^3$?
   (d) Je každý konvexní obal zároveň lineární varietou? Vysvětlete.
   (e) Je každý afinní obal zároveň lineární varietou?

   [3 body]

2. (a) Vyslovte Cramerovo pravidlo.
   (b) Pomocí Cramerova pravidla najděte 3. složku řešení soustavy s maticí $\mathbb{A}$ z příkladu 2. a pravou stranou $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (c) V čem je výhoda a v čem nevýhoda Cramerova pravidla oproti Gaussově eliminaci?

   [3 body]

3. (a) Definujte pozitivně definitiní matici.
   (b) Nechť $\mathbb{A}$ je PD matice řádu n s komplexními prvky. Zaveďte $\mathbb{A}$-skalární součin.
   (c) Vyslovte Schwarz-Cauchyovu nerovnost.
   (d) Zvolte si PD matici $\mathbb{A}$ řádu 2, která není diagonální. Pro tuto matici ověřte, zda se nabývá rovnost ve Schwarz-Cauchyově nerovnosti pro vektory
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}.$$
   (e) Uměli byste v předchozím bodě odpovědět i bez výpočtu? Vysvětlete.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.