Zkoušková písemka 17.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující rovnice

$$\alpha x \quad + \quad \beta y \quad + \quad \gamma z \quad = \quad 1$$

[4 body]

2. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ regulární?

   (b) Pro taková α najděte $\mathbb{A}^{-1}$.

   (c) $\mathbb{A}^{-1}_{21}$ spočtěte také pomocí matice adjungované. (Uveďte obecně, jaký vzorec používáte).

   (d) Jak se operátor A definovaný pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ jako $A\vec{x} := \mathbb{A}\vec{x}$ jmenuje? (Nápověda: Uvědomte si, jakou operaci A s vektory v $\mathbb{R}^3$ provádí.)

[4 body]

3. (a) Je matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

      i. hermitovská,

      ii. unitární,

      iii. pozitivně definitní?

   (b) Co vše umíte říci bez počítání o jejích vlastních číslech, vl. vektorech a diagonalizaci?

   (c) Poté vlastní čísla spočtěte a najděte k nim příslušné LN vlastní vektory.

[4 body]

4. Nechť je dán vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \mid \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \}$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P,

   (a) pokud $\mathbb{R}^4$ je vybaven standardním skalárním součinem,

   (b) pokud $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem, kde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

   (a) Najděte normálové (neparametrické) rovnice obou variet.

   (b) Určete, o jaké lineární variety se jedná.

(c) Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2.

(d) Najděte průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte unitární matici 2 různými ekvivalentními způsoby.

   (b) Nechť $\mathbb{A}$ je unitární matice řádu n a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$. Z následujících rovností ty správné dokažte, pro ty chybné najděte protipříklad.

   i. $< \mathbb{A}\vec{x}, \mathbb{A}\vec{y} >=< \vec{x}, \vec{y} >$

   ii. $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{y} >=< \vec{x}, \mathbb{A}\vec{y} >$

   (c) Jaká má unitární matice vlastní čísla?

   (d) Jaký má unitární matice determinant?

   [3 body]

2. (a) Definujte skalární součin.

   (b) Je následující zobrazení skalárním součinem? $< \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) >:= x_1y_2 + x_2y_2$. Vysvětlete.

   (c) Může pro nenulové lineárně závislé vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ platit:

   i. $||\vec{x} + \vec{y}|| = ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$?

   ii. $| < \vec{x}, \vec{y} > | = ||\vec{x}||||\vec{y}||$?

   iii. $||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2$?

   Pokud ano, dejte příklad. Pokud ne, vysvětlete proč.

   [3 body]

3. (a) Definujte determinant matice i všechny pojmy z oblasti permutací, které v definici použijete.

   (b) Co se děje s determinantem matice, když v ní provedeme jednu ekvivalentní řádkovou úpravu. (Popište pro všechny tři ekvivalentní řádkové úpravy.)

   (c) Jaký je determinant regulární matice? Tvrzení dokažte s využitím bodu (b).

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.