Zkoušková písemka 10.6.2010 Jméno:

Praxe

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definujeme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.

   (b) Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho hodnost a jádro.

   [4 body]

2. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ neznáme.)

   (a) Z následujících matic vypočtěte všechny ty, které lze na základě zadaných údajů získat: $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}^{-1}$, $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$, $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$, $\mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}$, $\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^T$.

   (b) Dále spočtěte determinant $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ a determinanty všech Vámi spočtených matic.

   [4 body]

3. Pro tu z následujících matic, která je hermitovská a není symetrická, uveďte, co vše víte o jejích vlastních číslech, vlastních vektorech a diagonalizaci bez počítání. Poté najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $Q = [\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$, $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, tj. bázi ortogonálního doplňku Q do P, je-li v $\mathbb{R}^4$ definován standardní skalární součin.

   [4 body]

   BONUS za 1 bod:

   Řešte stejnou úlohu, je-li v $\mathbb{R}^4$ definován $\mathbb{A}$-skalární součin s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Nechť W_1, W_2 jsou dvě lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha, \quad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccccc} x & + & 4y & + & 4z & + & u & = & 12 \\ x & - & y & - & z & - & u & = & 0 \end{array}.$$

Najděte směrovou rovnici variety W_2. Rozhodněte, o jaký druh variet se jedná a jakou mají vzájemnou polohu a průnik a spočtěte jejich vzdálenost.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte hermitovskou matici.
   (b) Co víte o vlastních číslech hermitovské matice? Tvrzení dokažte.
   (c) Může mít hermitovská matice záporné vlastní číslo? Pokud ano, uveďte příklad takové matice. Pokud ne, tvrzení dokažte.
   (d) Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ a $\mathbb{A}$ hermitovská matice řádu n. Co jste pak schopni říct o součinech $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{y} >$ a $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{x} >$?
   (e) Co víte o vlastních vektorech hermitovských matic? Zkontrolujte, zda je Vaše tvrzení v souladu s výsledkem příkladu 3.

   [3 body]

2. (a) Definujte charakteristický polynom.
   (b) Jaký je jeho stupeň?
   (c) Jaký je koeficient u nejvyššího členu charakteristického polynomu?
   (d) Jaký je koeficient u konstantního členu charakteristického polynomu?
   (e) Jak lze spočíst determinant matice, známe-li vlastní čísla? Tvrzení dokažte.
   (f) Mají podobné matice stejné charakteristické polynomy? Vysvětlete.
   (g) Platí, že když matice mají stejné charakteristické polynomy, pak jsou si podobné? Vysvětlete.

   [3 body]

3. (a) Vyslovte větu, v jejímž důkazu se objevuje Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.
   (b) Popište Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.
   (c) BONUS: Ilustrujte Gram-Schmidtův OG proces na souboru $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.